可爱的证明，自然而然的 e

Po-Shen Loh（罗博深）*

2025 年 5 月 30 日

摘要

常数 e 与数学各个领域有着千丝万缕的联系，并享有作为自然对数底数的殊荣。然而，大多数学生即便完成了中学甚至大学的课程，对 e 各性质之间的内在联系仍然未建立起合理且深刻的直观理解。本文的撰写为这个问题提供了一种解决方案。

本文所涉及的数学定理的证明早已家喻户晓。但文章的贡献在于提供一个简洁、概念清晰、直观且具可视化的证明方法，使得高中阶段初步认识微积分的学生也能理解。这一证明展示了 e 最广为人知的两个性质之间的等价关系：一个是连续复利的极限 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$；另一个则是函数 e^x 恰好是其自身的导数。并由此自然而然推导出许多教材中常见的 e 的性质，同时最大限度减少对前置数学知识的要求。该方法也实用于在中学数学课程的开发设计中。

尽管 e 的各种性质已是老生常谈的概念，很难想象现在还能提出一种全新的可视化证明方法，但作者查阅了来自七个国家的一百本教材，观看了累计超过两千五百万次观看的 YouTube 教学视频，竟然仍未找到任何资料教授该方法。因此，作者希望通过本文让这短短三页的 e 的介绍得到广泛关注和理解，并为有关 e 的教学提供一个统一、实用、开放的参考。

1 引言

大名鼎鼎的数学常数 π 拥有重大象征意义：联合国教科文组织将每年的 3 月 14 日定为“国际数学日”[129]，许多人会在这一天食用圆形派、背诵 3.14 后面的小数位来庆祝。而常数 e 虽然在数学中的重要性与 π 不分伯仲，拥有专属的计算器按键（如 e^x 或 ln），甚至有一本长达 200 页的书籍，《e：一个数字的故事》专门讲述它的来龙去脉 [78]，但 e 在普罗大众中却仍不见经传。

事实上，e 具有非同小可的数学基本性质，在众多领域中发挥着重要作用。然而，大多数学生并不理解这些性质怎样彼此关联。造成这一现象的原因，或许在于主流教学方法在首次介绍 e 时，通常会从下列某一性质入手定义 e（不同国家所选性质见第3.1节），然后指出 $e \approx 2.718281828459045$，或推导、验证其一两个其他性质，最后将其他内容推迟到更高年级再讲授。

*卡内基梅隆大学数学科学系。电子邮箱：hello@poshenloh.com。鸣谢中文翻译：刘芮阳，赵奕恺，孙玉涛，李梓凡。如需面向大众的简明讲解，请参见：https://www.poshenloh.com/e

事实 1. 下列各项皆属实：

(i) 表达式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 在 n 趋近无穷时趋近于 e（在俄语中称为 *второй замечательный предел*，即“第二显著极限”）

(ii) 表达式 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 在 n 趋近无穷时趋近于 e^x

(iii) 存在唯一一个实数 e，使得以 e 为底的指数函数在其 y 轴截距处的切线斜率恰为 1

(iv) 函数 e^x 的导数仍为其自身

(v) 函数 e^x 是微分方程 $y' = y$ 在初始条件 $y(0) = 1$ 下的解

(vi) 有 $\dfrac{d}{dx}\log_e x = \dfrac{1}{x}$，且 $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = \log_e x$

(vii) $e = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots$

(viii) $e^x = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots$

(ix) 有 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$，令 $\theta = \pi$ 时，得到最美丽的数学公式：$e^{i\pi} + 1 = 0$

以美国高中数学为例，课程中通常会在预备微积分阶段首先通过计算复利引入 e 的概念，也就是对性质(i)与(ii)的引入；并通过代入较大的 n 值，近似得到 $e \approx 2.718$。但随后，学生又被告知，自然对数的底数正是这个神秘的复利极限 e。这往往会造成认知上的困惑——这个底数看起来一点也不“自然”，尤其是与我们熟悉的以 10 为底的“常用对数”相比。因而在美国，许多即便数学成绩优秀的高中生，往往只会死记硬背 e 的其它性质，比如 e^x 的导数是其自身，却未能直觉感知这些性质是如何从复利定义出发推导而来。图1展示了普遍教授的，较为简短易懂的性质间蕴含的逻辑推导关系。

$$
\begin{tikzcd}
\text{(i)} \arrow[rr, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & & \text{(vi)} \arrow[dd, Leftrightarrow] & \\
& \text{(ii)} \arrow[d, Rightarrow] & & \\
\text{(vii)} & \text{(viii)} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{(iv)} \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{(iii)} \arrow[l, Rightarrow] \\
& \text{(ix)} & \text{(v)} &
\end{tikzcd}
$$

图 1: 常见的推导关系及其简洁证明。黑色箭头表示预备微积分课程通常讲授的内容，蓝色箭头对应的是微积分课程中介绍的推导，而红色箭头所对应的内容则在现代教学中已不常见，但在几百年前曾以非正式方式被推导出来（例如雅各布·伯努利在研究复利问题时的结果 [11]）。

本文的贡献在于提出一个概念清晰、直观且可视化的论证方法，在短短三页篇幅内，仅依靠预备微积分知识，推导出事实1(i)、(ii)、(iii)与(iv)。我们以(iii)作为 e 的定义出发，在整个推理过程中

始终保持直观易懂的方式进行推理。作者也正是在反复思索 e 究竟为何"自然", 以及为何(i)与(iv)等价的过程中，逐渐构思出这一教学策略的。（当然，已有一些其他方法可以从(iii)/(iv)推导出(i)，或反向推导，第3.1节中将列举若干方案以供比较。）

多年来，作者曾在多个数学夏令营中介绍该方法，例如 2018 年 6 月在 Mathcamp 的一次专题讲座（关于 Canada/USA Mathcamp 的生动描述详见 [99]）。他注意到听众普遍从未听说过这种推理方式。不过，鉴于 e 这个主题在全球范围内研究甚多，互联网上关于 e 的问题层出不穷，相关视频更是数以千计（参见表1），如果本文真的是首次以文字形式完整记录这三页推理，作者自己也会感到惊讶。

本文有三个目标：一是以可视化推理构建一个自洽、实用的教学参考，自然且直观地将多个 e 的性质贯通，适合直接嵌入中学课程体系；二是提供一份易于理解且数学逻辑上完备的公开资料，用于统一解答网络上大量关于 e 的零散问题；三是向广大读者征集是否已有出版文献包含本文这套可视化证明方法，尤其是关于1(i)与(iii)/(iv)等价关系的部分。

本文结构如下：下一节给出完整推理过程，可直接作为教学材料使用。随后，我们将在第3.1节中回顾七个国家的现行教学方法，在第3.2节中简要讨论历史背景，并在第4节中分享作者关于教育目的的思考与总结。

2 数学讲解：关于 e 为什么是"自然"常数的实用教学方案

本文最重要的部分位于第 4–6 页。本节所涉及的数学内容都控制在中学生能够理解的范围内，旨在最大程度让学生们理解概念。同时，这些论证也保证了数学的严谨性：若在某一步骤中希望追求更高的严谨性，相关解释对于具备数学分析背景的读者而言是常规操作，对洞察力并无特殊要求。附录A中的证明表明我们的符合直觉的证明亦是建立在坚实的基础之上。

通过事实1 (iii) 推导出(i) 的过程（见第2.3节），是本文的关键桥梁，这是作者尚未在其他地方见过的，在预备微积分的教材中未提及的创新内容（详见第3.1.2节关于相关微积分教材的引用，并提及若知晓正确方法，便可将其提炼为预备微积分语言进行表述，以及为什么这样的尝试并非显而易见的讨论）。本文中的其他证明虽非原创，但为构建一个自成一体且逻辑上不存在循环依赖关系的教学参考资料，作者仍然将其收录。文章里所选用的非原创证明均经过精心挑选，目的是最大可能的减少对读者前置知识的要求。例如，就连事实1 (v)中的微分方程，只用到了初等微积分中的中值定理（而不依赖任何微分方程理论知识）。

2.1 一个"自然"的定义

从几何的角度来看，指数函数曲线其实只有一种形状，因为所有的指数函数曲线 $y = a^x$（其中底数 a 为正实数）都只是彼此在水平方向上的拉伸变换的结果[1]. 这就正如所有的椭圆，其实也都只

[1]我们假设学生已经学习了对于任意正实数 a 和任意有理数 $fracmn$，幂 $a^{\frac{m}{n}}$ 是有定义的, 且可以表示为 $\sqrt[n]{a^m}$。至于无理数指数，大多数学过预备微积分的学生会本能地用有理数指数来近似它们。附录A说明了这样做确实没问题。

是彼此的拉伸变换是一样的（而且这也是因为相同的预备微积分理由）。例如，曲线 $y = 8^x$ 沿水平方向以 6 倍比例拉伸，就得到曲线 $y = 8^{x/6} = (\sqrt{2})^x$，如图2所示。

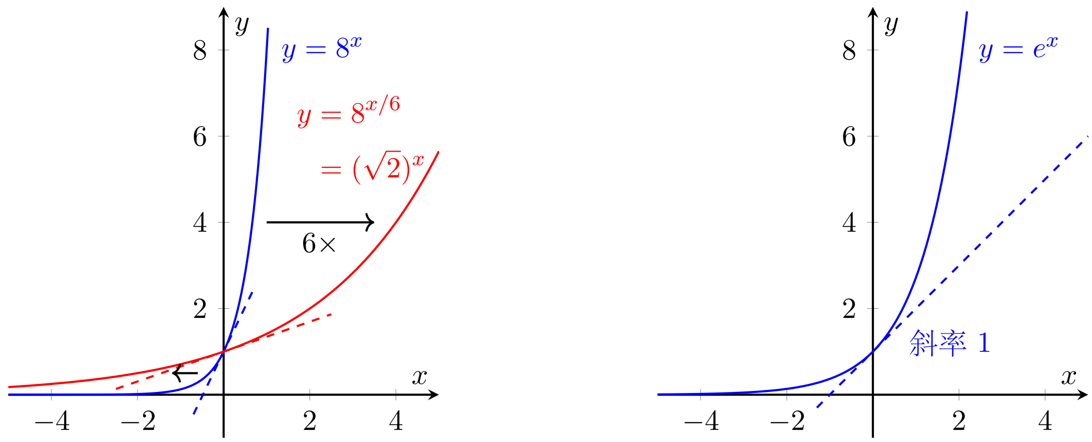


图 2: 指数曲线的任意水平方向拉伸都会产生另一个以正实数为底的指数曲线，因此存在唯一的正实数底数，使其指数曲线在 y 轴截距处的切线斜率为 1。

不同的拉伸倍率会对应于不同底数的指数函数曲线。从几何角度看，在这些水平方向拉伸后的曲线中，恰好有一条曲线在其 y 轴截距处的切线具有优美的斜率，1[2]。**我们定义 e 为对应于该曲线的唯一正实数底数。**

第3.1.2节指出，一些微积分教材以此作为 e 的非正式定义，但在该节所调查的教材书籍中，没有一本使用我们提出的水平拉伸方法来论证这样一个数字的存在。Jerison 在 MIT OpenCourseWare 的一节视频讲座里就这么做了 [92]Need to Insert Reference[3]。

其实，我们还可以更进一步（这一步在现有文献中尚未被提及）：这种水平拉伸的方法还能提供一种简单的方法来近似计算 e 的值。事实上，在那些采用该定义的教材中，很多已经通过以下方式近似计算曲线 $y = 3^x$ 在 $(0,1)$ 处的切线斜率：取其领域中的一点 $(0.0001, 3^{0.0001})$，并计算斜率 $\frac{3^{0.0001}-1}{0.0001-0} \approx 1.09867$，然后将其近似为 1.1。但这些教材并未指出：若将图像在 x 方向按 1.1 倍进行拉伸，则切线斜率将变为 $\approx \frac{1.1}{1.1} = 1$。于是，$y = 3^{x/1.1} = \left(3^{\frac{10}{11}}\right)^x$ 的切线斜率约为 1。这已经给出了不错的近似：$e \approx 3^{\frac{10}{11}} = \sqrt[11]{3^{10}} \approx 2.715$。若进一步使用完整数值 1.09867 替代 1.1，则可以得到更精确的估计：$e \approx 3^{1/1.09867} \approx 2.71814$，这与 2.71828 已经非常接近。**作者建议凡是使用类似方式定义 e 的教材都加入这一简短的计算过程。**

同样类型的斜率计算可以立即导出关于 e 的也许是最重要的事实，即微积分学生熟知的 $\frac{d}{dx}e^x = e^x$。

事实 1 (iv): 曲线 $y = e^x$ 在任意点 (x, e^x) 处的斜率是 e^x.

[2]由于学生可以对图像进行放大，因此在 $x = 0$ 处存在切线这一事实，其实比极限 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 的存在更容易让人信服。附录A给出了形式化的证明，说明了这里不存在循环论证。

[3]感谢 Vishal Lama 找到这个参考资料。

证明. 用一条通过图像上两个非常接近的点——(x, e^x) 和 $(x+h, e^{x+h})$——的直线, 来近似 (x, e^x) 处的切线，其中 h 是趋近于 0 的实数。这样子得到的斜率是

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{(x+h) - x} = e^x \cdot \left(\frac{e^h - e^0}{h - 0} \right). \tag{1}$$

最后这个括号表示通过点 $(0, 1)$ 和曲线 $y = e^x$ 上另一个邻近点 (h, e^h) 的直线的斜率。当 h 趋近于 0 时，这个斜率趋近于曲线 $y = e^x$ 在 $x = 0$ 处的切线斜率。根据我们对 e 的定义，这个值是 1。因此在点 (x, e^x) 处的切线斜率是 $e^x \cdot 1 = e^x$，正如所希望的那样。 $\square$

2.2 插曲：关于 “自然” 一词的教学评论

这是一个解释什么是 “自然” 定义的契机。的确，$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 的极限是在研究复利问题时自然地出现的（通常归功于伯努利 [11]）。在这里,“自然”一词的用法是指在书写 n 期复利公式的过程中，人们很可能会遇到这个表达式。

然而，在缺乏更深层次的论证下，用“自然”一词来描述对数还是不恰当的。对数本质上并非起源于利息问题；况且，现代社会定义的复利本身其实并不“自然”。一个奇特的现象是，历史上一些人曾将“年利率 12%，按月复利”定义为每个月（无论是 28、29、30 还是 31 天），都加 1% 的利息（参见 [72]，该文献综述了复利观念的发展历程）。

相比之下，研究指数函数才是自然的。如前节所述，所有指数函数本质上都是同一条曲线，只是在水平方向上根据不同的系数被拉伸了。那么，哪一条指数曲线最特殊？显然不是 10^x，因为 10 之所以被选择, 仅仅是因为人类恰好有 10 根手指。

切线的斜率是一种区分指数曲线的几何方法。在哪一点处考虑切线呢？y 轴截距是一个自然的选择（反正也没有 x 轴截距）。为何选择斜率为 1 呢？唯一比 1 更简单的数是 0，但若追问哪一个正实数底数的指数函数在 y 轴截距处切线斜率为 0，其答案有点无趣：只有 $y = 1^x$ 符合条件，而这无非是一个复杂化的“1”的重定义。因此，我们转向下一个最简单的斜率值——1，这就导向了最自然的指数函数定义（也因此给出最自然的对数函数）。作为一个优美的结果，式 (1) 中的括号趋近于 1，并且作为乘法因子消去。

2.3 可爱的桥梁

本节我们将证明在预备微积分中熟悉的表达式：$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 趋近于前一节中我们所定义的 e，即事实1 (iii) ⇒(i)。此外，我们也将顺便不费吹灰之力的得出(ii)。第一步是一个标准而常用的技巧，即将任意幂转化为对数的指数形式，该技巧与 e 的概念本身无关[4]。具体公式如下，对于任意正实数 a、b 和任意实数 n，有 $a^n = b^{n \log_b a}$。

---

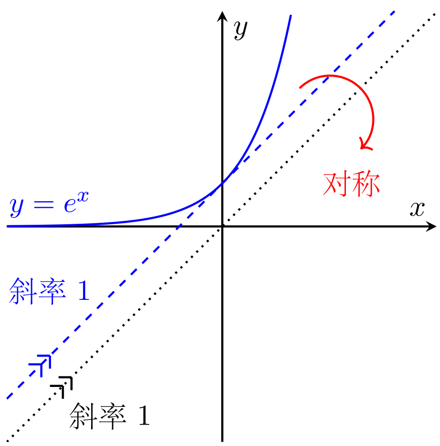
[4]这一步所用到的结论，通常在定义 e 之前的章节中已经证明过。为了完整起见（并说明这里并不存在循环定义）：公式(2)可由以下事实推导而来：对于任意正实数底数 b，函数 $\log_b x$ 是 b^x 的反函数（见附录A）；且 $(b^c)^n = b^{cn}$。

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(e^{\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n = e^{n\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)}. \tag{2}$$

我们选择底数 $b = e$（而非其他数，例如 10）来进行计算，是因为现在我们只需证明指数部分在 n 趋近无穷时趋近于 1。第一个关键洞察是对指数进行如下重新排列：

$$n\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \frac{\log_e\left(1+\frac{1}{n}\right)-\log_e(1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)-(1)}. \tag{3}$$

最后的表达式正是函数 $y = \log_e x$ 在 x 轴截距点与其附近另一点之间的割线斜率。随着 n 的增大，这个割线斜率趋近于 $(1, 0)$ 处的切线斜率！因此，只要我们证明该斜率为 1（这也是一个非常自然的目标），整个推导就完成了。第二个关键洞察可以通过图3来描绘。由于 $\log_e x$ 是 e^x 的反函数，函数 $y = \log_e x$ 的图像即为 $y = e^x$ 关于直线 $y = x$ 的反射。但 $y = e^x$ 在 $(0, 1)$ 处的切线斜率为 1，而 $y = x$ 本身的斜率也是 1，因此二者平行。将其关于 $y = x$ 反射后，所得 $y = \log_e x$ 在 $(1, 0)$ 处的切线也将具有相同的斜率 1，**从而完成了对事实1 (i)的证明！** □



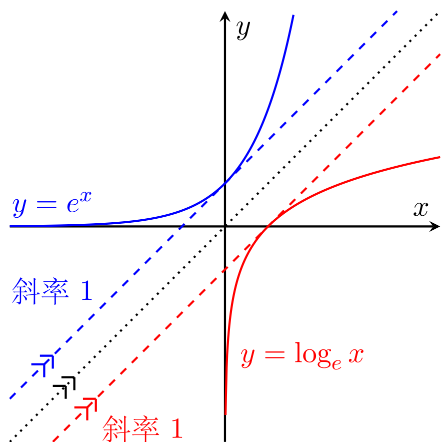


图 3: 关于为何 $y = \log_e x$ 在 $(1, 0)$ 处的切线斜率为 1 的几何直觉。

实际上，用同样的论证也可以证明：对于任意固定实数 x，当 n 趋近无穷时，表达式 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 趋近于 e^x：

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\log_e\left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$n\log_e\left(1+\frac{x}{n}\right) = x\cdot\left(\frac{\log_e\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right) = x\cdot\left(\frac{\log_e\left(1+\frac{x}{n}\right)-\log_e(1)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)-(1)}\right).$$

事实上，最后的括号表达式仍然趋近于 $y = \log_e x$ 在 $x = 1$ 处的切线斜率，因为当 $n \to \infty$ 时，$\frac{x}{n} \to 0$，所以该表达式仍趋近于 1。因此，$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 趋近于 $e^{x\cdot 1} = e^x$，**从而证明了事实1 (ii)**。 □

2.4 微积分的推论

接下来的证明将不可避免的使用微分方程的语言，因为命题涉及一个微分方程。幸运的是，我们可以跳过理论性很强的关于解存在性的证明，因为事实 1(iv) 已经证明 $f(x) = e^x$ 是满足微分方程 $f'(x) = f(x)$ 和初始条件 $f(0) = e^0 = 1$ 的初始条件 $f(0) = e^0 = 1$ 的微分方程 $f'(x) = f(x)$ 的一个解。

事实1(v): $y = e^x$ 是微分方程 $y' = y$，初始条件 $y(0) = 1$ 的唯一解。

证明. 在中文表述中，我们明确指出 e^x 是唯一解，这既意味着它确实是一个解，也意味着不存在其他解。我们接下来就从这两个方面加以说明：一方面，e^x 满足微分方程 $y' = y$，且 $e^0 = 1$，因此它确实是一个解（这一点已由上一个事实直接推出）；另一方面，我们还需证明不存在其他解。

不存在其他解这一点可以通过一个标准的唯一性论证完成，该论证仅需用到中值定理，因此可以在初等微积分中教授（不依赖于微分方程课程）。为此，设有另一个函数 $g(x)$ 也满足 $g'(x) = g(x)$，且 $g(0) = 1$。则它与 e^x 的差 $h(x) = f(x) - g(x)$ 满足微分方程 $h'(x) = 0$，初始条件 $h(0) = 1 - 1 = 0$。

我们将证明 $h(x)$ 恒等于 0。若不然，设存在实数 c 使得 $h(c) \neq 0$，则根据导数的中值定理，在 0 与 c 之间存在一点 b，使得

$$h'(b) = \frac{h(c) - h(0)}{c - 0} = \frac{h(c)}{c} \neq 0,$$

这与 $h'(x) = 0$ 矛盾。因此对于所有 x，都有 $f(x) - g(x) = h(x) = 0$，即 f 与 g 恒等，故不存在其他解。 □

事实1(vi)：$\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = \log_e x$。

证明. 我们只需证明 $\log_e x$ 的导数是 $\frac{1}{x}$。考虑曲线 $y = \log_e x$ 上的任意一点 (a, b)。根据关于直线 $y = x$ 的对称性（见图4），该点的切线斜率与曲线 $y = e^x$ 在点 (b, a) 处的切线斜率互为倒数。

我们已经证明过 e^x 的导数就是其自身，因此 $y = e^x$ 在 (b, a) 处的切线斜率为 a，于是 $y = \log_e x$ 在 (a, b) 处的切线斜率为 $\frac{1}{a}$，证毕。

□

以切线斜率为 1 来定义 e 的好处在于，所有这些与导数相关的性质都可以较为优雅且直观地推出，所需的前置知识极少。我们在建立 e^x 的导数时不需要任何微积分的先修知识，在确保微分方程 $y' = y$、初始条件 $y(0) = 1$ 的解存在时也不需要何微分方程理论 (仅用到了初等微积分中的平均值定理)。

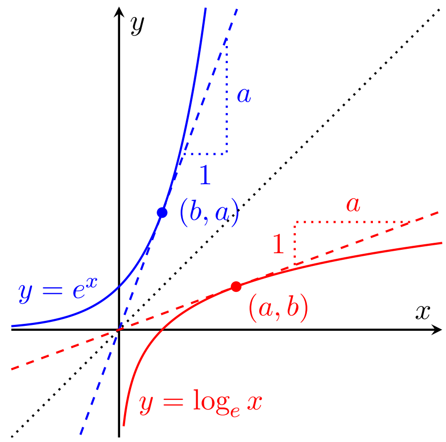


图 4: 反函数的导数。两条直角三角形的直角边分别为 a 与 1，互为镜像，因此 $y = \log_e x$ 的红色切线与 $y = e^x$ 的蓝色切线的斜率互为倒数（纵边与横边对换）。这里的论证是公式 $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ 的一种特殊情形。

2.5 泰勒级数

对于学过泰勒级数的学生来说，推导1中剩余性质时，最直观的方法是利用先前证明的的 e^x 的所有阶导数仍为 e^x，而且在 $x = 0$ 处的取值都是 1。把 e^x 在此处用泰勒级数展开即可**推出事实1(viii)**:

$$e^x = \frac{1}{0!} + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

根据比值判别法，该级数在任意 x 处都绝对收敛。因为无论 x 为何值，第 $n+1$ 项与第 n 项之比为 $\frac{x}{n+1}$，而当 $n \to \infty$ 时，该比值趋近于 0。将 $x = 1$ 代入上式，**可得事实1(vii)**:

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

事实1(ix)涉及了 $e^{i\theta}$。此前我们只定义了实数幂的指数函数。复数幂的标准定义是将 e^x 的处处绝对收敛的级数展开为:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \frac{1}{0!} + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(\frac{1}{0!} - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \cdots\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \cdots\right), \end{aligned}$$

该级数绝对收敛，我们可以交换各项的顺序整理表达式。

在微积分中，学生会学习到：弧度制下，$\sin x$ 的导数为 $\cos x$，二阶导为 $-\sin x$，再导为 $-\cos x$，接着又回到 $\sin x$，循环往复。可得 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的泰勒级数为:

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \\ \cos x &= \frac{1}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \end{aligned}$$

将上述结合在一起，**便得到了事实1(ix)**：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

□

注。很多学生疑惑为什么数学家偏爱弧度制，因为在他们眼中角度制的 $90°$ 比弧度制的 $\frac{\pi}{2}$ 整洁多了。其实，弧度制才是最自然的角度单位，这种"自然"与 e 的自然非常类似：只有在弧度制下，基本三角函数 $\sin x$ 的导数才是干净利落的 $\cos x$。

的确，只有在使用弧度时，$\sin x$ 在 0 处的导数才满足

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1,$$

这在俄语中被称为 *первый замечательный предел*，即「第一显著极限」。正是因为 $\sin x$ 与 e^x 在 $x = 0$ 处的导数都为 1，欧拉漂亮的恒等式才能成立。

相比之下，将圆周划分为 360 个角度缺少普适的数学意义。这一数值之所以被选择，仅仅是因为它与世人皆知的地球一年的天数接近，而且可以被许多整数整除。

2.6 避开泰勒级数的推导方式

使用泰勒级数推导事实1(vii)与(viii)很便利，但有的学生会从预备微积分的历史知识趣闻中得知 e 的无穷级数形式，他们那时还未学习泰勒级数。本节另辟蹊径，建立无需高等微积分的证明。

伯努利在其 1690 年发表关于复利的研究 [11] 中曾指出[5]，连续复利的极限是级数 $\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$。他并未给出推导过程，也不可能使用泰勒级数——因为泰勒在 1715 年才发明泰勒级数。[122]。从表述来看，他很可能使用的是二项式定理，不是微积分。二项式定理是一个纯代数组合的结论，早在对数、微积分与 e 出现之前的几个世纪便已确立：

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n,$$

其中对于非负整数 n 与 k，

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

最终分子中恰有 k 个因子，即 $(n),(n-1),\ldots,(n-k+1)$。

事实1(vii)：$e = \dfrac{1}{0!}+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots$。

直观推理（非严谨证明）. 通过二项式定理，我们得到：

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{(n)(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{(n)(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{(n)(n-1)(n-2)\cdots(1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}.$$

[5]伯努利写道：若借款金额为 a，年利息为 b（当时利息为金额数值，而非百分比，这相当于利率为 $\frac{b}{a}$），则在连续复利的极限下，需还金额为 $a+b+\frac{b^2}{2a}+\frac{b^3}{2\cdot 3a^2}+\frac{b^4}{2\cdot 3\cdot 4a^3}+\frac{b^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^4}$。当 $a=1$ 时，这正是级数 $\frac{1}{0!}+\frac{b}{1!}+\frac{b^2}{2!}+\cdots$。

第一项等于 $\frac{1}{0!}$，第二项等于 $\frac{1}{1!}$。第三项为：

$$\frac{(n)(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)$$

注意，当 $n\to\infty$ 时，该项单独趋近于 $\frac{1}{2!}$。类似地，下一项等于 $\frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\right)$，其极限为 $\frac{1}{3!}$，依此类推。这些正是所求级数 $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots$ 中的各项 $\frac{1}{k!}$，因此该结果看来是成立的。 □

这一解释已经能满足学生们对 $S=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots$、$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与 "e^x 导数为其自身" 之间关系的好奇心。它展示出无穷级数中阶乘的出现是自然而然源自二项式定理的系数。这种程度的解释给中学生足够了。为了让授课教师相信此证明滴水不漏[6]，下面给出一个严谨的 ϵ-N 极限证明。

严谨证明. 记：

$$a_{n,k}=\frac{1}{k!}\cdot\left(\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right).$$

我们需证明：这个和的序列 $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}$ 在 $n\to\infty$ 时收敛于绝对收敛的级数 S。对任意 n，其差值满足

$$|S-S_n|=\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k!}-a_{n,k}\right)+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}\right|\le\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{1}{k!}-a_{n,k}\right|+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

显然有 $\left|\frac{1}{k!}-a_{n,k}\right|\le\frac{1}{k!}$，因此对任意正整数 $m\le n$，也有

$$|S-S_n|\le\sum_{k=0}^{m}\left|\frac{1}{k!}-a_{n,k}\right|+\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{k!}. \tag{4}$$

接下来考虑任意实数 $\epsilon>0$。存在整数 N_1，使得 $\sum_{k=N_1+1}^{\infty}\frac{1}{k!}<\frac{\epsilon}{2}$。此外，对于每个固定的 k，$\lim_{n\to\infty}a_{n,k}=\frac{1}{k!}$，因此存在整数 N_2，使得对于所有 $n>N_2$，并且 $0\le k\le N_1$ 时，总有 $\left|\frac{1}{k!}-a_{n,k}\right|<\frac{\epsilon}{2(N_1+1)}$。将 $m=N_1$ 代入(4)中，对于每个 $n>\max(N_1,N_2)$，有：

$$|S-S_n|<(N_1+1)\cdot\frac{\epsilon}{2(N_1+1)}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon,$$

根据极限的 ϵ-N 定义，得证 $S_n\to S$。 □

注。相同的论证也说明，$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\to e^x$ 意味着 $e^x=\frac{1}{0!}+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$，从而给出一个不依赖泰勒级数的**事实1(viii)证明**。

[6] $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}$ 并不总等于 $\sum_{k=0}^{n}\lim_{n\to\infty}a_{n,k}$。一个经典的反例是当 $a_{n,k}=0$（对于所有 $k\neq n$），但所有 $a_{n,n}=1$ 时。

3 讨论环节

3.1 现有中学（及大学）课程设置

本章总结作者对美国及几个其他国家的中学数学课程的调研结果。作者坦言本人对美国教育体系和英文资料最为熟悉，因此对其他国家教材的调研覆盖范围较为有限。他通过造访多所大学图书馆，翻阅了一排又一排书架以寻得这些教材。因此，本节英文教材占据主导地位。

浏览这些教材之后，作者对编写综合性教材的作者们深表敬意。本节无意以任何方式贬低他们的巨大贡献——这些教材的作者和编者在数百页的内容中融入了无数教学上的创新与权衡取舍。相反，本节总结目前的教学现状，旨在推动教育方法在全球范围并肩前进。

3.1.1 美国：预备微积分

在美国，导数与积分的教学通常仅在微积分课程中进行，学生一般会在在高中最后几年，或在大学阶段才有机会接触微积分，也有很多学生完全不会接触该内容。常数 e 通常是在在预备微积分（Pre-Calculus）、代数二（Algebra 2）或代数与三角函数（Algebra with Trigonometry）的课程中首次被定义的，这些课程通常在学生学习指数函数和对数函数的阶段开设。本节回顾了 20 本出版于 1916 到 2021 年间的预备微积分类教材。

20 世纪初的教材多聚焦于对数的计算功能。例如，Cracknell 在其 1920 年出版的著作中 [39] 开篇即指出："对数是用于快速计算的幂指数。"其他如 Clapham[32] 和 Breslich[23] 的教材亦持类似立场，三者均有大量关于对数表和计算尺的使用说明。前两本教材仅使用以 10 为底的对数，完全未提及 e，第三本虽然略有提及，但并未作出正式定义。

作者查阅了 20 世纪 70 年代的教材（如 Crowdis 和 Wheeler[40] 所著的教材，其中仍包含对数表，以及 Stockton[118]）和 80 年代的教材（如 Paul 和 Haeussler[96]）。到了 90 年代，美国的数学教材市场趋于标准化，同时集中形成一个系列并不断再版，如 Blitzer[20]，Connally 等 [34]，Glencoe/McGraw-Hill[31]，Larson[68]，Lial 等 [77]，Stewart 等 [117] 和 Sullivan[119, 120]。近年来，也出现了开放教育资源，如 OpenStax 系列 [2, 3]。另有少数强调数学竞赛的非传统系列资源，如《Art of Problem Solving》[104, 105]。

上述 20 世纪 70 年代以后出版的预备微积分书籍大致采用了相同的阐述方法，它们都提到了 e 约等于 2.718（有些书籍中会给出更多的小数位数），其中许多教材明文规定 e 的精确定义：$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限。多数教材使用此极限定义推导连续复利公式 e^{rt}，其中 r 为利率，t 为时间。大部分教材会指出 e 在微积分及科学应用中非常重要，但未提供本质上需要以 e 为底对数的具体实例。之后，它们会定义以 e 为底的自然对数 $\log_e$。但没有任何一本教材提及 e^x 图像的切线斜率问题。有些教材会提到在微积分课程中会学习到 e 更多漂亮的的性质，但并未提及具体细节。

极少数教材特立独行。Axler 所著的预备微积分教材 [8] 采用了一种不同于其他微积分教材中常见的方式，定义 e 为满足 $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$ 的实数。由于该书定位为预备微积分教材，并未正式定义黎曼积分，而是给出了未经证明的近似值。它对连续复利公式 e^{rt} 提供了一个简要推导，但也存在

类似于本论文第3.1.6节将讨论的近似误差问题。

最接近本文处理方式的教材是 Cohen 于 1997 年出版的 [33]。该书实际上提供了两种不同的 e 定义：一种是极限形式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，另一种是定义为在 $x=0$ 处切线斜率为 1 的指数函数的底数。但该书仅指出 “it's certainly not obvious” 这两种定义是等价的，并未提供证明。

3.1.2 美国：微积分

另一方面，对一些美国（或更广泛地说，英文）微积分和大学数学教材的调查显示，这类教材中有更多关于 e 性质的证明。本节回顾了 53 本出版于 1908 年至 2023 年间的相关书籍。一些应用型微积分教材（如 [9, 46, 70, 71, 75, 76]）使用的 e 定义与前一节预备微积分教材中相同，都是使用极限 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，并侧重于应用而非严格证明 e^x 的导数仍为 e^x。本节后面重点讨论理论性稍强的教材。

到了 20 世纪末，微积分教材也与先前提到的预备微积分不约而同，趋于标准化并形成若干主流系列。少数教材较为独特，例如 Blakey 于 1949 年出版的教材 [19] 将一般指数函数定义为 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$，而 Landau 于 1950 年的教材 [66] 则将自然对数定义为 $\log x=\lim_{n\to\infty}2^n\left(x^{1/2^n}-1\right)$。

20 世纪上半叶及中叶，最常见的两种处理方法之一，是将 e 定义为这两个等价极限 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 中的一个，接着用如下方式推导以 e 为底对数函数的导数：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\log_e x &= \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\log_e\frac{x+h}{x}}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}}\\ &=\frac{1}{x}\cdot\lim_{h\to 0}\log_e\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}}=\frac{1}{x}\cdot\log_e\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h/x}}=\frac{1}{x}\cdot\log_e e=\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

随后，利用反函数求导公式便可推出 e^x 的导数，因为 e^x 正是 $\log_e x$ 的反函数，进而建立整套理论系统。该方法大致出现在 Osborne 于 1908 年的教材 [92]、Osgood 于 1922 年的教材 [93] 和 Morrill 于 1956 年的教材 [87] 中。该方法也出现在若干经过多次再版的教材中，如 Berresford 和 Rockett[12, 13]，Edwards 和 Penney[44]，Grossman[55]，Waner 和 Costenoble[131]，以及 Washington 和 Evans[134]。

另一种常见方法是将自然对数定义为积分形式 $\log x=\int_1^x\frac{dt}{t}$，以回避无理数指数幂的问题（我们会在附录A中讨论），然后定义 e 为使得 $\log e=1$ 的实数。此方法出现在许多经典教材中，如 Hardy 于 1928 年出版的《A Course of Pure Mathematics》[57]，Courant 和 Robbins 于 1953 年的《What is Mathematics?》[38]，Courant 和 John 于 1965 年的教材 [37]，Olmsted 于 1966 年 [91]，Apostol 于 1967 年 [6]，Hadley 于 1968 年 [56]，以及 Spivak[112] 和 Patrick 在《Art of Problem Solving》系列中的教材 [95]。

这个方法也同样出现在一些多次再版教材中，包括 Thomas 的《Calculus and Analytic Geometry》（如第 4 版 [126]，第 6 版 [127]，第 9 版 [128]），Varberg 和 Purcell[130]，Fitzpatrick[47]，以及 Briggs[26] 和 Larson 与 Edwards[69] 的标准版本中。

到了 20 世纪末期，一种新的教学方法横空出世，替代了原本的思路。在 1970 年，Flanders、Korfhage 和 Price 的教材 [48] 就采用了与本论文第2.1节相同的定义：将 e 定义为使得 $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ 的唯一实数，即 e^x 在 $x=0$ 处切线斜率为 1。其存在性通过数值导数和插值估算支持（而非我们的水平拉伸论证）。此定义未显式提及极限 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。1978 年 Flanders 和 Price 的后续教材 [49] 则讨论了该极限，并使用欧拉法估算 e（如第3.1.5节所述）。Goldstein 等人 [53] 的处理方式亦类似。

到 1980 年代，Bittinger 系列教材 [15, 16, 17] 也使用了该定义，但在介绍 e 时并未严谨证明其与 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 或 $(1+h)^{1/h}$ 极限的等价性。其他一些教材也使用此定义，但所给的推导与本论文的方法截然不同，如 Herman 和 Strang[58]，Hughes-Hallett、Lock 与 Gleason[61]，Rogawski 等人 [100, 101, 102]，以及 Stewart 的《Essential Calculus》[116]。

1995 年，Stewart 的微积分系列教材 [113, 114, 115] 在再版第三次后推出了两个版本，即标准版和《早期超越函数（Early Transcendentals）》。《早期超越函数》版本在《美国数学月刊（The American Mathematical Monthly）》的评价中亦有提及 [94]。该系列的每本教材中对指数与对数的处理分为两个部分：在书籍较后面的介绍中使用积分 $\int_1^x \frac{dt}{t}$ 定义 $\log x$，并说明这是更为严谨的处理方式；在书籍开头则加入直观但不严谨的介绍，定义 e 为使指数函数在 $x=0$ 处切线斜率为 1 的底数。书中并未证明此实数的存在性，可能因为默认使用后面的积分定义。教材使用与式(1)相同的方法推导 e^x 的导数，接着利用链式法则与隐函数求导法推导一般以 b 为底对数函数的导数：

$$\begin{aligned}
y &= \log_b x\\
b^y &= x\\
b^y(\log_e b)\frac{dy}{dx} &= 1\\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{b^y\log_e b}=\frac{1}{x\log_e b}.
\end{aligned}$$

然后通过代入 $b=e$ 与 $x=1$，将其改写为对函数 $f(x)=\log_e x$ 的导数的差商形式，从而推出 $(1+h)^{1/h}\to e$：

$$1=\frac{1}{1\cdot\log_e e}=f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{\log_e(1+h)-\log_e 1}{h}=\lim_{h\to 0}\log_e(1+h)^{1/h}=\log_e\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h},$$

因此 $(1+h)^{1/h}\to e$。该方法亦见于 Briggs[27] 和 Sullivan 与 Miranda[121] 的教材中。最后的差商形式实质上与式(3)相同，但对数函数的隐函数导数法（及链式法则）并不易转化为预备微积分语言。

另一方面，在早期超越函数（Early Transcendentals）版本的《托马斯微积分（Thomas' Calculus）》[135, 136]（该版本最早出现在 2002 年第 10 版）给出了两种 $\log_e x$ 导数的证明方法：一种为上述隐函数导数法，另一种为一般反函数导数定理，并通过对 $y=x$ 的对称证明该定理，即 $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$。Lang 于 1986 年的微积分教材 [67] 亦类似，只给出反函数导数定理的证明。从数学角度观察发现，本文其实就把该方法变得通俗接地气！只不过这些教材并未证明 e 的存在性（也未采用我们的水平拉伸法），而是依赖后续的积分定义作为指数与对数的理论基础。

对于熟练掌握微积分的读者而言，如果有人告诉他们有办法将上述论证方法简化，并用预备微积分的语言完整表述出来，那似乎一个轻而易举的任务。但这样一个可以用预备微积分表述的，直观、简化，且精炼的阐释版本的存在，其实并不显而易见。一般情况下，尝试将微积分的证明分解为预备微积分语言会适得其反，变得拖泥带水，玄而又玄，甚至不如直接教授微积分后再用它的结论。把本节其他段落中出现的任何一种论证方法进行此类转化都会一塌糊涂，像把 “隐函数法 + 链式法则” 推导 $\log x$ 导数转化为预备微积分语言，恐怕就是异想天开，不切实际，但这可是另一种方法的基石所在啊！

3.1.3 中国

在中国，公立学校采用标准化课程体系。其中包括所有学生必须学习的必修数学内容，以及只有部分学生学习的选修内容。教师使用官方教材作为主要参考资料，但有些教师会教授更多概念和方法。作者调查的近期出版的高中数学教材来自中国占主导地位的四家教材出版社：北京师范大学出版社 [132]、江苏凤凰教育出版社 [109]、人民教育出版社 [140] 和上海教育出版社 [74]。在这四本必修高中数学教材中，e 的引入均为：存在一个无理数 $e \approx 2.71828$，被用作自然对数 $\ln x$ 的底数；对于 e 究竟为何方神圣，并没有给出解释。有三本教材没有给出任何可以用来估算 e 的解释；唯独江苏版将 e 定义为 $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$，但也未提供关于 e 的进一步说明。所有教材均未引入极限 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$。（作者知道有些老师会教授此概念作为补充。）相反，教材直接给出自然对数与指数运算的公式，让学生在计算中千篇一律地机械使用。

北京师范大学出版社与人民教育出版社在书中加入了历史故事侧边栏，讲述 Napier 通过一个物理动力过程构造对数的故事（详见第3.2.1节）。尤其是人民教育出版社的侧边栏中提到纳皮尔原始构造的函数为 $y = 10^7 \left(\frac{1}{e}\right)^{x/10^7}$，但还是没有解释该函数的产生过程。

在北京师范大学出版社 [133]、江苏凤凰教育出版社 [110]、人民教育出版社 [141] 和上海教育出版社 [73] 出版的《选修 2》数学教材中，导数的定义为差商的极限。然后学生就直接被要求背一个导数公式表（不证明），其中同时包含如下公式：$(x^a)' = ax^{a-1}$，$(a^x)' = a^x \log_e a$，$(\sin x)' = \cos x$，$(\cos x)' = -\sin x$，$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log_e a}$，以及特别指出的 $(e^x)' = e^x$。教材并未对这些公式进行证明，也未解释为何 e 在多个公式中出现，而是继续展示如何利用这些公式作为基本步骤来计算更复杂的导数。（作者也知道有些老师会私下对学生讲解为什么 $(e^x)' = e^x$）

3.1.4 俄罗斯

本节调查的是俄罗斯的标准高中代数教材，而不是微积分教材。值得一提的是，它虽然只是代数教材，但已蕴含相当丰富的理论内容。教材中通常没有完整的证明，这不足为奇。本节所讨论的书相当于第3.1.1节中提到的美国预备微积分教材。

多本俄罗斯高中教材将 e 定义为使指数函数曲线的切线斜率为 1 的实数，但通常未对该实数存在的合理性进行解释。连面向职业教育学生的教材 [10] 也使用该方式定义 e，尽管它并未进一步推导出 $(e^x)' = e^x$，也未提供估算 e 的任何方式。面向普通高中生的教材，如 Kolmogorov 等人编

写的代数教材 [64] 则更为复杂，使用该定义推导出 e^x 和 $\log_e x$ 的导数，并求解微分方程 $y' = ky$。教材中的一个历史侧边栏提到 Napier 的构造，且不加证明地指出 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛于 e。该侧边栏也提到了对数 $\log_e x$ 在积分意义下的定义。Mordkovich 和 Semenov 的教材 [86] 采用了类似的处理方式，只是跳过了微分方程部分，也未提及积分定义。

Alimov 等人编写的教材 [5] 则从另一个出发点定义 $e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$。不过该定义并未用于推导任何结论（也许将该定义作为起点会使推导很不方便）。该书随后指出在高等数学课程中会证明 $(e^x)' = e^x$。上述所有教材书籍中，均未提及连续复利的概念。

3.1.5 法国

法国的教育体系（在 2021 年进行过一定改革）给那些在中学选择数学作为专业方向的学生设置了一条学习路径。根据这条路径，学生的多本高中教材都使用微分方程来定义指数函数、对数函数和 e。例如，Bonnet[22] 和 Bordas[21] 的教材都将指数函数定义为微分方程 $y' = y$ 在初始条件为 $y(0) = 1$ 下的解。纵观历史，这与 Napier 最初定义对数的方式一致（详见第3.2.1节）。

根据 Thirioux 教材 [125] 的公开目录来看，该参考文献中对指数函数的构造与欧拉法求解微分方程相关。因此，接下来很可能从微分方程出发，推导出如下极限的合理性：$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$。

证明 $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$. 令 $x_0 = 0$，$y_0 = 1$，并设 $x_k = \frac{kx}{n}$，其中 $k = 1, 2, \ldots, n$。我们将使用欧拉法来计算相应的 y 值，使得 (x_k, y_k) 近似沿着 $y' = y$ 的解曲线。当 $k = n$ 时，y_n 就是 $e^{x_n} = e^x$ 的一个近似值。

为从 y_k 得到 y_{k+1}，由于 $y' = y$，我们从 (x_k, y_k) 出发，沿着斜率为 y_k 的直线在 x 方向前进 $\frac{x}{n}$ 单位，得到：

$$y_{k+1} = y_k + y_k \cdot \frac{x}{n} = \left(1+\frac{x}{n}\right) y_k$$

因此 $y_0 = 1$，$y_1 = 1 + \frac{x}{n}$，$y_2 = \left(1+\frac{x}{n}\right)^2$，依此类推，$y_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 即为 e^x 的一个近似值。 □

3.1.6 德国

这次调研的德国高中教材（Griesel 等人 [54] 和 Frudigmann 等人 [51]）均将 e 定义为在 $x = 0$ 处切线斜率为 1 的指数函数的底数。这两本书都以 e^x 的差商为出发点来推进该定义，并以与本论文第2.4节中公式(1)相同的方式推导出 $(e^x)' = e^x$。

这两本教材也都引入了极限 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。不过，它们对该极限等于 e 的说明都从 e^x 在点 $(0, 1)$

处的差商极限出发，并进行如下推导：

$$\begin{aligned}\frac{e^{1/n}-1}{\frac{1}{n}} &\approx 1\\ e^{1/n} &\approx 1+\frac{1}{n}\\ e &\approx \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.\end{aligned}$$

最终这一结论虽然是正确的，但中间的逻辑可能让学生百思不得其解（而且需要额外论证）。其中对“≈”的定义有歧义。例如，在最后一行，“≈”的意思是：当 $n \to \infty$ 时，等式左右两边的差趋近于 0。然而遗憾的是，若以此定义解释第二行，即 $e^{1/n} \approx 1$，那么两边同时取 n 次方，就会得出 $e \approx 1^n = 1$，这是错的。

可以通过更精确的方式加以说明，例如：

$$\begin{aligned}\frac{e^{1/n}-1}{\frac{1}{n}} &= 1+o(1)\\ e^{1/n} &= 1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\\ e &= \left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n\\ e &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n+o(1),\end{aligned}$$

其中最后一步应用了二项式定理。然而，这种代数推理对学生来说也许过于抽象，尤其是对该学习阶段的学生而言，视觉展示往往比代数计算来的更加直观和便于理解。

当然，上述两本书出版于 2000 年和 2011 年，后续新的版本可能在处理方式上有所更新，目前不得而知。

3.1.7 英国

部分第3.1.2节中提到的微积分教材也适用于英国读者，G. H. Hardy 的教材就是其中之一。本节聚焦于英国中学教材。似乎英国学生通常不会在 GCSE 数学课程中遇到 e，而是在 A-level 数学课程中首次接触。本节调研了两本此类教材。

Attwood 等人编写的教材 [7] 遵循 Pearson Edexcel 的 A-level 纯数考试大纲，并在最后一章中涵盖了指数函数。教材通过展示三张函数图像引入 e。第一张图同时绘制了 $y = 2^x$ 和 $\frac{dy}{dx} = (0.693\ldots)2^x$ 的函数曲线；第二张图是 $y = 3^x$ 与 $\frac{dy}{dx} = (1.099\ldots)3^x$ 两条曲线；第三张图是 $y = 4^x$ 与 $\frac{dy}{dx} = (1.386\ldots)4^x$。教材随后在未给出证明的情况下指出，通过观察所绘制的曲线可发现 “In each case $f'(x) = kf(x)$, where k is a constant”（在每一种情况里，$f'(x) = kf(x)$，其中 k 是个常数）。这实质上是关于整条曲线之间成比例的强力陈述。教材接着指出 “there is going to be a unique value of a where the gradient function is exactly the same as the original function”（有一个特定的

数值 a，让斜率函数与原函数完全相同），然后将该数定义为 e，并说明 e^x 是其自身的导数。教材未提及复利概念，也未引入极限 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。

Goldie 等人编写的教材 [52] 获 Assessment and Qualifications Alliance（AQA）考试局批准，并遵循其大纲。这本书用年利率 100% 的高利贷按不同频率收复利的例子引入 e，随后将 e 定义为极限 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，并介绍连续复利公式 Pe^{rt}。在后续章节中，教材通过一个活动引导学生使用函数绘图软件求出 $y=e^x$ 在多个点处的导数（斜率），寻找巧合。总结这些实验的观察结果，教材最后指出 e^x 是其自身的导数。

3.1.8 新加坡

2016 年，新加坡在经济合作与发展组织（OECD）主办的国际学生评估项目（PISA）测试中位居全球第一 [36]。实际上，多年来新加坡早已将其数学课程推广至世界各地。《华尔街日报》2004 年的一篇文章 [98] 曾报道美国马萨诸塞州教育局长计划引入新加坡数学课程作为改革。据该文所述，当时这一课程体系已被美国各地约 200 所学校采纳，范围从俄克拉荷马的乡村到新泽西的城市。然而在美国，新加坡数学教材通常用于低年级阶段，不涵盖对数和指数内容。

在新加坡课程体系中，学生第一次接触 e 的阶段似乎是在高中《Additional Mathematics》（附加数学）课程中。本文调查的两本教材，分别由 Teh 与 Loh[123] 以及 Ho 与 Khor 编写 [59]。这两本书与美国的处理方式类似，都将 e 介绍为一个小数近似值，给出极限 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 作为定义，并在复利问题中加以应用。

有趣的是，这两本教材均涵盖了导数与积分内容。第一本教材引导学生借助绘图技术进行探索，该技术可以实现 “Draw Tangent”(绘制切线),学生们整理出出 $y=\log_e x$ 在 $x\in\{0.1,0.25,0.5,1,2,3,4,5,6\}$ 处的切线斜率实验表格，并提出问题 “Can you guess the derivative of the curve $y=\ln x$?”（猜猜 $y=\ln x$ 的导数是什么?）。教材未给出任何证明。

第二本教材则采用与美国微积分类似的方式（见第3.1.2节），写出一般指数函数的差商表达式：

$$\frac{d}{dx}a^x=\lim_{h\to0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\cdot\lim_{h\to0}\frac{a^h-1}{h},$$

并指出关键在于理解最后一个极限的值。当说明在 $a=e$ 时该极限为何为 1 时，教材给出的论证与德国教材第3.1.6节相同：

$$\begin{aligned}\frac{a^h-1}{h}&\approx1\\a^h&\approx1+h\\a&\approx(1+h)^{1/h}.\end{aligned}$$

与第3.1.6节一样，新加坡教材主要问题在于符号“≈”的使用不够严谨，需借助我们在该节中提供的方法进行更精确的解释。

3.1.9 YouTube

风靡全球的视频分享平台 YouTube 上有大量关于 e 为何 “自然” 的视频，其标题本身就体现了许多人对此问题的兴趣。一个典型的例子是 3Blue1Brown 的视频《What’s so special about Euler’s number e?》（欧拉常数 e 哪里特殊？）[1]，以及 Eddie Woo 发布的《What is the number “e” and where does it come from?》（数字 e 是什么，从何而来？）[137]。截至 2025 年 4 月 9 日，这两段视频的播放量分别为 440 万与 350 万次。

作者在 YouTube 上搜索了关于 e 的视频，并将观看次数最多的视频收集整理于表格1。观看所有视频后，作者均未发现本文所使用的论证方法。其实许多视频只是陈述了关于 e 的事实，而未进行解释。因此，作者计划发布一个本方法的视频讲解，链接将置于`https://www.poshenloh.com/e`。

3.2 一些历史背景

本节旨在提供若干历史背景，以解释当前关于 e 的教学与理解在全球范围内呈现出的割裂状态。事实上，e 的各种性质在历史上源自完全不同的研究方向，而最终奇迹般地指向了同一个数字。

若要完整讲述 e 的历史，篇幅将远超本文主文。我们在此向好奇的读者推荐以下资料：Maor 于 1994 年出版的关于 e 的 200 页专著 [78]、Coolidge 于 1950 年在《美国数学月刊》上发表的文章 [35]、Hobson 于 1914 年出版的关于纳皮尔发明的 50 页著作 [60]，以及 Cantor 于 1898 年用德文撰写的数学史经典 [30]。

3.2.1 纳皮尔（Napier）

“对数”（logarithm）一词由纳皮尔创造，源自两个希腊词根：*logos*（意为“比例”）和 *arithmos*（意为“数”）。纳皮尔在 1614 年发表的原始著作 [89]（其构造在他去世后出版的遗著 [88] 中有更详细解释）并非出于对指数函数的研究动机，而是为了发明一种用以加速算术运算的方法。

例如，加法运算中，两个 n 位数相加大约只需 n 次操作（逐位相加，最多带进位）；但乘法却不同，两个 n 位数相乘通常需要数量级为 n^2 的操作（每一位都要与另一数的每一位相乘）；而标准除法方法则更加繁琐。他设计的对数系统可以将乘法转化为加法，将除法转化为减法。

他将这一成果出版为《*奇妙对数表之说明*》（Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio）。其序言中写道（中文翻译由 GPT-o1 提供）：

Channel	Date Published	Views
Numberphile [90]	2016-12-19	4.7M
3Blue1Brown [1]	2017-05-02	4.4M
Eddie Woo [137]	2015-02-23	3.5M
Infinity Learn NEET [62]	2016-12-08	3M
MindSphereYT [83]	2024-04-04	1.3M
Zach Star [139]	2019-05-15	1.2M
polymathematic [97]	2022-09-13	894K
Mathacy [81]	2021-01-17	695K
Li Yongle (李永乐老师) [138]	2018-06-13	687K
Tarek Said [106]	2022-03-04	656K
MommyTalk (妈咪说) [85]	2019-01-07	605K
Daniel Rubin [103]	2021-06-14	419K
Math Centre [80]	2016-07-29	402K
Mathologer [82]	2017-03-30	394K
MIT OpenCourseWare [84]	2019-01-16	360K
Domotro [42]	2022-09-02	356K
Better Explained [14]	2012-01-31	340K
diplomatic fish [41]	2022-08-16	289K
Dr Sean [43]	2024-06-24	271K
Math and Science [79]	2020-03-24	243K
Ali the Dazzling [4]	2024-12-15	206K
Foolish Chemist [50]	2024-10-31	134K
The Organic Chemistry Tutor [124]	2020-01-21	132K
blackpenredpen [18]	2017-09-24	101K
Khan Academy [63]	2017-07-25	78K

表 1: 关于 e 的热门 YouTube 视频，截至 2025 年 4 月 9 日累计播放量超过 2500 万次。

Quum nihil sit (charissimi mathematum cultores) mathematicae praxi tam molestum, quodque Logistas magis remoretur, ac retarder, quam magnorum numerorum multiplicationes, partitiones, quadratique ac cubicae extractiones, quae praeter prolixitatis tedium, lubricis etiam erroribus plurimum sunt obnoxiae: Coepi igitur animo revolvere, qua arte certa & expedita, possem dicta impedimenta amoliri. Multis subinde in hunc finem perpensis, nonnulla tandem inveni praeclara compendia, alibi fortasse tractanda: verum inter omnia nullum hoc utilius, quod una cum multiplicationibus, partitionibus, & radicum extractionibus arduis & prolixis, ipsos etiam numeros multiplicandos, dividendos, & in radices resolvendos ab opere rejicit, & eorum loco alios substituit numeros, qui illorum munere fungantur per solas additiones, subtractiones, bipartiones, & tripartitiones. Quod quidem arcanum, cum (ut cetera bona) sit, quo communius, eo melius: in publicum mathematicorum usum propalare libuit. Eo itaque libere fruamini (matheseos studiosi) & qua a me profectum est benevolentia, accipite. Valete.

鉴于在一切数学实践中，最为烦扰亲爱的数学爱好者们的，莫过于对大数的乘法、除法，以及平方根与立方根的提取。这些操作不仅冗长繁复，令人厌倦，更极易因操作疏忽而导致错误。于是我开始思索，是否存在一种既可靠又简便的方法，能够扫除上述诸多障碍。在反复权衡诸多途径之后，我终于发现了一些巧妙卓越的捷径，或许另有机会再作专门论述；但在所有方法之中，尤以此法最为有用：它不仅能大大简化艰深冗长的乘除与开方运算，甚至连原本需要进行乘除与开方的那些数字本身也可被剔除，取而代之以另一类数字，使之仅通过加法、减法、二等分与三等分等基本操作，便能完成原本复杂的任务。既然这一奥秘，如同其他所有美善之事，越广为传播便越有益，我遂决定将其公之于众，供广大数学家使用。愿诸位数学研习者畅然使用此法，并以我一片诚意欣然接纳之。敬颂时祺。

纳皮尔在构造对数时，并未专注于选择哪一个底数。他的核心目标是将乘法转化为加法。他尤其关心正弦与余弦的乘法问题，因为这类运算在球面三角中频繁出现，而球面三角又对海上航行至关重要。因此，他所出版的 90 页对数表，实际上是所有从 $0°0'$ 到 $89°59'$ 的角度之正弦值的对数（其中 d 度 m 分表示为 $d+\frac{m}{60}$ 度）。因此，他的主要目标是为每个 $0 \le y \le 1$ 的数定义一个对数函数 $f(y)$，因为对于所有 $0° \le \theta \le 90°$，都有 $0 \le \sin\theta \le 1$。

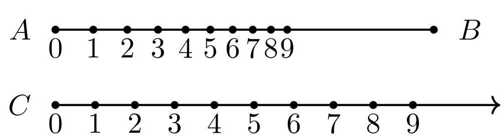


图 5: 纳皮尔的构造。两个点同时出发，分别从 A 与 C 出发，初始速度相同。当上方线段上的点位于位置 t 时，下方射线上的点也正好位于位置 t。

纳皮尔的惊人发现在于，他能够通过一个物理运动过程，将乘法转化为加法，并以此来定义对数（见图5）。该过程涉及两个同步运动的粒子：一个沿着长度为 $L = 10{,}000{,}000$ 的有限线段从 A 点向 B 点移动，另一个沿着从 C 点出发的无限直射线运动。两个粒子起始时速度相同，其中无限射线上的粒子始终保持恒定速度。但最关键，也最有趣的部分在于：有限线段上的粒子的移动速度

始终与其距 B 的剩余距离成正比。用纳皮尔自己的话说：

Linea proportionaliter in breviorem decrescere dicitur, quum punctus eam transcurrens aequalibus momentis, segmenta abscindit ejusdem continuo rationis ad lineas a quibus abscinduntur.	当一点沿某条线段以相等的时间间隔移动时，若其每次截取下来的部分，与尚未经过的剩余部分保持恒定比例关系时，便称该线段按比例递减。

纳皮尔对线段 AB 上的位置作如下规定：令 $L = 10{,}000{,}000$ 对应于点 A 的位置，0 对应于点 B 的位置；而在射线上，点 C 的位置为 0，位置值向右无限增长。纳皮尔将某个数 y 的对数定义为：当线段 AB 上的粒子处于位置 y 时，射线上粒子相应的位置 x。这恰好就是微分方程 $y' = -\frac{y}{L}$，初始条件为 $y(0) = L$。该微分方程的解为 $y = Le^{-\frac{x}{L}}$，从而本质上引出了 e 的出现。实际上，纳皮尔定义的某个数 y 的对数就是 $-L\log_e \frac{y}{L}$。他之所以取 $L = 10{,}000{,}000$，很可能是为了避免小数的出现，因为他曾写道：

Ut sit semi-diameter seu sinus totus rationalis numerus 10,000,000	令半径（或称全正弦）为有理数 10,000,000

他的最终定义实际上与正弦函数的缩放选择无关。

6. Def. Logarithmus ergo cujusque sinus, est numerus quam proxime definiens lineam, quae aequaliter crevit, interea, dum sinus totius, linea proportionaliter in sinum illum descrevit, existente utroque motu synchrono, atque initio aequiveloce.	定义 6：因此，某个正弦的对数，指的是这样一个数——它所定义的那条线在正弦总长按比例递减至该正弦值的过程中，始终以匀速增长；这一过程与正弦的递减过程同步开始，且初速度相同。

如今我们将全正弦视为 1，而不是 10,000,000。令人惊讶的是，如果将他的最终定义配合我们今天对正弦的标准缩放方式使用，那么将对应于 $L = 1$，并导出解 $y = e^{-x}$。要理解他选择 $L = 10{,}000{,}000$（平移小数点）的原因，查看一下他那 90 页的对数表会非常有帮助。例如，他写道 18° 的正弦是 3090170，其对数为 11743586。实际上，$\sin 18^\circ = 0.3090170$，而 $\log_e \sin 18^\circ = -1.1743590$。这已经非常接近，只需移动小数点。因此，纳皮尔原始定义的对数几乎就是自然对数。若他定义 $\sin 90^\circ = 1$，那么它就正好是自然对数。他无意中从根本上引入了 e，其过程本质上与微分方程1(v)是等价的。

3.2.2 早期的其他工作

纳皮尔的工作引起了极大的轰动。他的同时代数学家布里格斯（Briggs）对此激动不已，甚至亲自前往拜访纳皮尔，并提出重新缩放对数，使其围绕一个以 10 为基础的底数构造，而不是源于 e（参见 Briggs 的著作 [24, 25]，以及 Bruce 撰写的历史回顾 [28]）。和纳皮尔一样，布里格斯也避免使用小数。例如，他在《*对数的算数*》（Arithmetica Logarithmica）中列出的表格显示，2488 的

对数为 3,39585,03760,1979。实际上，$\log_{10} 2488 = 3.39585037601878$，只是进行了小数点平移，结果非常接近。

当前教材中最常讲授的 e 的定义是事实1(i)，即 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的极限。该定义源于对复利问题的研究。伯努利在 1690 年发表的 [11] 中不仅研究了连续复利，还写下了无穷级数形式的事实1(vii): $\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots$。虽然他没有展示推导过程，但鉴于其研究起点是高频复利，他几乎肯定使用过 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 这一表达式。

另一种常见的自然对数定义起始于对 $\frac{1}{x}$ 的积分。17 世纪中叶，数学家发现双曲线下的面积与对数密切相关。Burn 的著作 [29] 探讨了 Saint-Vincent[107] 与 de Sarasa[108] 这两位与之相关的数学家的历史著作之间的关系。

欧拉在 1748 年的《无穷解析引论》(*Introductio in Analysin Infinitorum*) 中写出了以 a 为底的对数函数的幂级数展开式:

$$\log_a(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$

其中常数 k 与底数 a 之间的关系如下:

$$\begin{aligned} a &= 1+\frac{k}{1}+\frac{k^2}{2!}+\frac{k^3}{3!}+\cdots \\ k &= \frac{a-1}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\cdots \end{aligned}$$

他计算出，对于以 10 为底的对数，上述常数 $k \approx 2.30258$（即 $\log_e 10$ 的近似值）。接着他注意到，若取 $k=1$ 代入上式，则所对应的底数为 $a = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$。他选用了字母 e 来表示这一自然底数，并将其正式引入。

Quod si iam ex hac basi Logarithmi construantur, ii vocari solent Logarithmi naturales seu hyperbolici, quoniam quadratura hyperbolæper istiusmodi Logarithmos exprimi potest. Ponamus autem brevitatis gratia pro numero hoc 2,718281828459 &c. constanter litteram e, quæergo denotabit basin Logarithmorum naturalium seu hyperbolicorum, cui respondet valor litterae $k = 1$*; sive hæc littera e quoque exprimet summam huius Seriei* $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+$ *&c. in infinitum.*

倘若我们现在以此数为底来构造对数，则这类对数通常被称为自然对数，或称双曲对数，因为双曲线的面积问题可以借助这类对数加以表达。为了简便起见，我们规定将这个数 2.718281828459 等等，用字母 e 来表示，因此 e 就代表了自然对数或双曲对数的底数，其对应的常数 $k=1$。换句话说，这个字母 e 也可表示如下数列的和: $1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\cdots$

3.2.3 这可能是新的视角吗?

这些数学事实当然早已为人所知。然而，本文所提出的教育路径，在其他地方却意外地难以寻见。回顾前面历史部分展示的不同视角中的 e，可以理解为何关于 e 的教学存在如此多的差异。

这并非首次有人在数学教育背景下探讨这一主题（例如，Evans 在 1939 年发表于《国家数学杂志》（*National Mathematics Magazine*）的教师部门栏目 [45]）；这也不是首次有人尝试探索 e 的教学新方式（例如，Kós 与 Kós 的工作 [65]）。

在计算器尚未广泛普及之前，旧版中学数学教材中的对数章节大量着墨于纳皮尔最初的目的：加速算术运算。这些教材教授学生如何使用对数表与滑尺（slide rules）。要绘制指数函数图像，或估算诸如 $3^{1/1.09867}$ 之类的表达式，都很难实现。在美国，对 e 直观定义"其指数曲线在 $x = 0$ 处的切线斜率为 1"的普及，似乎低价位计算器的发展大致同步。据史密森学会的调查 [111]，1970 年与 1971 年间，Busicom 与 Sharp 两家日本公司在美国推出了最早的便携式计算器。惠普公司在 1972 年推出 HP-35，售价为 \$395。同年，德州仪器公司推出 TI-2500，售价为 \$149.95，但这台计算器仅具备基本的加减乘除四则运算功能，尚未支持幂与对数计算。1973 年，TI 公司推出 SR-10，售价 \$150，新增了倒数、平方与平方根功能，但依然不支持幂与对数。随着价格逐年下降，1974 年的 TI-50 定价 \$170，具备幂与对数功能；1975 年推出的 HP-21 进一步将这一功能带入 \$125 的价位。作者本人正好出生于这一时期，亲历计算器逐渐进入普通家庭的过程。他记得自己小时候曾摆弄过一台卡西欧科学计算器（可能是 Casio *fx-120*），随机按下按键，欣赏那绿色荧光显示屏在电池迅速耗尽之前所呈现的奇妙数字。

因此，这种教学方法的出现时间主要集中在过去五十年之内也就不足为奇了。正如本文多次提到，如果某位熟悉微积分的读者得知存在这样一种教学方法，并被告知应该从各类微积分教材中提炼整合的内容，那么就很可能轻松地补充细节，拼合出完整的论证过程。但微积分教材的目标只在于教授微积分，因而自然而然地构建起各类工具体系以备后用（也因此，作者们无需刻意将内容简化至有预备微积分知识即可掌握的难度）；而中学阶段的教材又往往避谈微积分，于是 e 便在两者之间被遗漏了。

作者之所以能在这两者之间建立桥梁，是因为他除了在大学执教，也经常亲自教授中学生。他常走入中学课堂，进行"不透露身份"的客座教学（当然是经由学校事先许可），他尤其关注那些学生对数学学习方面存在困难的学校。学校往往会向学生介绍说："这位是 Mr. Po，今天是你们的代课老师。"完全不提及他其他的教育背景与工作经历。他用这种方式亲身体验普通学生的思维过程，以便设计出真正能够激发学生思考热情、并希望帮助更多人通过教育获取更好的发展机会。

4 结语

常数 e 可谓魅力十足，是众多重要数学概念的核心。遗憾的是，e 对于大多数人而言仍然神秘莫测，对其性质往往也只是死记硬背。英文维基百科关于 e 的解释更像是关于其性质杂乱无章的罗列，缺乏对于这些核心性质之间为何互相关联的直观解释。

那么，数学教育的目的是什么？是否仅仅在于让学生学会如何基于这个神秘的数字 e 迅速而准确地处理有关 ln 的公式化计算？在本文写作时，低成本的人工智能工具已经能够执行复杂的计算任务。或许，数学教育真正的目标应当是培养创造性思维、逻辑推理能力与好奇心。未来某一天

人工智能也可能具备这些能力，对人类来说，善于深度思考的能力就显得更加重要。与其只能算出[7] $3^{1/\log_e 3}$ 的值，不如鼓励学生思考为何 ln 是自然存在的，并引导学生们去探究和理解其背后的逻辑。

希望本文能够促使世界各地的教科书对相关数学概念的内容加以更新，把这一重要的数学概念从“魔法”的范畴中拯救出来，归入逻辑的范畴。为了达这个目的，可能最应该整合的重要的部分是第2.1节中以横向拉伸定义 e 的方法，以及第2.3节中与连续复利之间的直观联系。同时，也应加入关于“自然”一词含义的讨论，例如第2.2节所探讨的。此外，第(1)式所展现的差商计算也值得纳入其中，因为它揭示了 $y = e^x$ 的切线斜率始终等于 e^x。有趣的是，这样一来它就成为了最容易证明的导数公式之一！

作者对这种教学中“魔法”与“逻辑”之间的相互影响尤其敏锐。根据他的观察，一旦学生的数学学习从逻辑推理滑向死记硬背，进一步的提升就变得极其困难。希望通过这篇文章，未来当被问到“e 有什么自然之处”时，人们能够给出概念性的回答，并欣赏其中所蕴含的优雅的数学逻辑推理与美妙的巧合，而不是回答说 e 是一个神秘的无理数，只是 ln 中出现的一个奇怪常数，而他们更喜欢 log_{10}。

事实上，e 比 10“自然”得多。若有朝一日人类接触外星生命，很可能他们会认为 10 才是奇怪的数字（除非某种奇怪的巧合让他们也和人类一样，恰好有 10 根手指）。外星人们甚至可能会争论圆周率该用 π（约等于 3.14）还是 τ（约等于 6.28）。但毫无疑问，他们肯定会用 e。

References

[1] 3Blue1Brown. *What's so special about Euler's number e? | Chapter 5, Essence of calculus.* `https://www.youtube.com/watch?v=m2MIpDrF7Es`. Accessed: 2025-04-09. Views: 4.4M. May 2, 2017.

[2] Jay Abramson. *Algebra and Trigonometry.* 2nd ed. Houston, TX: OpenStax, Rice University, 2021. URL: `https://openstax.org/details/books/algebra-and-trigonometry-2e`.

[3] Jay Abramson. *Precalculus.* 2nd ed. Houston, TX: OpenStax, Rice University, 2021. URL: `https://openstax.org/details/books/precalculus-2e`.

[4] Ali the Dazzling. *Where does "e" come from?* `https://www.youtube.com/watch?v=50QPdW78Dfc`. Accessed: 2025-04-09. Views: 206K. Dec. 15, 2024.

[7] 细心的读者或许已经在第2.1节注意到，$y = 3^x$ 在 $x = 0$ 处切线的斜率估算为 $1.09867 \approx \log_e 3$，正如微积分所揭示的那样。因此，$3^{1/1.09867}$ 是 e 的良好近似值，因为 $3^{1/\log_e 3} = 3^{1/\frac{\log_3 3}{\log_3 e}} = 3^{\log_3 e} = e$。

[5] Sh. A. Alimov, Yu. M. Kolygin, M. V. Tkachyova, N. E. Fyodorova, and M. I. Shabunin. *Алгебра и начала математического анализа: 10–11 классы, Учебник для общеобразовательных организаций, Базовый и углублённый уровни*. Russian. 8th ed. Algebra and the beginnings of mathematical analysis: Grades 10–11, Textbook for General Education Institutions, Basic and Advanced Levels. Moscow: Просвещение (Prosveshchenie), 2016, p. 463.

[6] Tom M. Apostol. *Calculus: One-Variable Calculus, With an Introduction to Linear Algebra*. 2nd ed. Vol. 1. New York: John Wiley & Sons, 1967.

[7] Greg Attwood, Jack Barraclough, Ian Bettison, Alistair Macpherson, Bronwen Moran, Su Nicholson, Diane Oliver, Joe Petran, Keith Pledger, Harry Smith, Geoff Staley, Robert Ward-Penny, and Dave Wilkins. *Pure Mathematics: Year 1/AS*. Ed. by Harry Smith. Edexcel AS and A level Mathematics. London: Pearson, 2017.

[8] Sheldon Axler. *Precalculus: A Prelude to Calculus*. 3rd ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2016. ISBN: 978-1-119-33043-1.

[9] Raymond A. Barnett, Michael R. Ziegler, and Karl E. Byleen. *Calculus: For Business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences*. 13th ed. Boston, MA: Pearson, 2014.

[10] M. I. Bashmakov. *Математика: Начальное и среднее профессиональное образование*. Russian. 5th ed. Mathematics: Primary and Secondary Vocational Education. Moscow: Академия (Academy Publishing Center), 2012, p. 256.

[11] Jacob Bernoulli. "Quæstiones nonnullæ de usuris, cum solutione proble matis de sorte alearum, propositi in Ephem. Gall. A. 1685. artic 25". Latin. In: *Acta Eruditorum* (May 1690). Some questions about interest, with the solution of a problem about the stake in dice games, proposed in the French Ephemerides, Year 1685, article 25, pp. 219–223.

[12] Geoffrey C. Berresford and Andrew M. Rockett. *Applied Calculus*. 7th ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2016.

[13] Geoffrey C. Berresford and Andrew M. Rockett. *Brief Applied Calculus*. 6th ed. Boston, MA: Brooks/Cole, 2012.

[14] Better Explained. *Understanding the number e | BetterExplained*. `https://www.youtube.com/watch?v=yTfHn9Aj7UM`. Accessed: 2025-04-09. Views: 340K. Jan. 31, 2012.

[15] Marvin L. Bittinger. *Calculus*. 4th ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1988.

[16] Marvin L. Bittinger. *Calculus: A Modeling Approach*. 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1980.

[17] Marvin L. Bittinger, David J. Ellenbogen, and Scott A. Surgent. *Calculus and Its Applications*. 11th ed. Boston, MA: Pearson, 2016.

[18] blackpenredpen. *what is e, and the derivative of exponential functions*. `https://www.youtube.com/watch?v=SxJ7X8vE-f0`. Accessed: 2025-04-09. Views: 101K. Sept. 24, 2017.

[19] Joseph Blakey. *University Mathematics: A Textbook for Students of Science and Engineering*. Glasgow: Blackie & Son Limited, 1949.

[20] Robert Blitzer. *Precalculus*. 1st ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001. ISBN: 0-13-028153-0.

[21] Gabriel Boissière, Marie-Laure Brunel, Vincent Douce, Gérald Gaudens, Rachid Hammoum, Florence Lomprez, Marie-Line Moureau, Cécile Rameau, Dominique Wargnies, and Catherine Lebert. *Maths spécifique + spécialité, terminale S*. French. Défibac. Paris: Bordas, 2017. ISBN: 978-2-04-735626-5.

[22] Valère Bonnet. *Cours de mathématiques: Terminale S*. French. `https://mathsaulycee.info/ts/cours.pdf`. PDF document, accessed on 2025-03-27. May 29, 2011.

[23] Ernst R. Breslich. *Third-Year Mathematics for Secondary Schools*. The University of Chicago Mathematical Series. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1917.

[24] Henry Briggs. *Arithmetica Logarithmica*. Latin. London: William Jones, 1624.

[25] Henry Briggs. *Logarithmorum Chilias Prima*. Latin. London, 1617.

[26] William Briggs, Lyle Cochran, Bernard Gillett, and Eric Schulz. *Calculus*. 3rd ed. New York, NY: Pearson, 2019.

[27] William Briggs, Lyle Cochran, Bernard Gillett, and Eric Schulz. *Calculus: Early Transcendentals*. 3rd ed. New York, NY: Pearson, 2019.

[28] Ian Bruce. “The agony and the ecstasy — the development of logarithms by Henry Briggs”. In: *The Mathematical Gazette* 86.506 (July 2002), pp. 216–227.

[29] R. P. Burn. “Alphonse Antonio de Sarasa and Logarithms”. In: *Historia Mathematica* 28.1 (2001), pp. 1–17. ISSN: 0315-0860. DOI: `https://doi.org/10.1006/hmat.2000.2295`. URL: `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S031508600092295X`.

[30] Moritz Cantor. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. German. Vol. 3. Lectures on the History of Mathematics. Leipzig: B. G. Teubner, 1898.

[31] John A. Carter, Gilbert J. Cuevas, Roger Day, Carol Malloy, Luajean Bryan, Berchie Holliday, Viken Hovsepian, and Jay McTighe. *Glencoe Precalculus*. 2nd ed. Columbus, OH: McGraw-Hill, 2011.

[32] Charles B. Clapham. *Arithmetic for Engineers*. The Directly-Useful Technical Series. London: Chapman & Hall, 1916.

[33] David Cohen. *Precalculus*. 5th ed. St. Paul, MN: West Publishing Company, 1997.

[34] Eric Connally, Deborah Hughes-Halett, and Andrew Gleason. *Functions Modeling Change: A Preparation for Calculus*. 5th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2015.

[35] J. L. Coolidge. "The Number e". In: *The American Mathematical Monthly* 57.9 (Nov. 1950), pp. 591–602.

[36] Sean Coughlan. "Pisa tests: Singapore top in global education rankings". In: *BBC News* (Dec. 6, 2016). URL: `https://www.bbc.com/news/education-38212070`.

[37] Richard Courant and Fritz John. *Introduction to Calculus and Analysis*. Vol. 1. New York, NY: Interscience Publishers, 1965.

[38] Richard Courant and Herbert Robbins. *What Is Mathematics?* 4th ed. London: Oxford University Press, 1953.

[39] Alfred George Cracknell. *Practical Mathematics (Stage I.)* 4th ed. London: Longmans, Green and Co., 1920.

[40] David G. Crowdis and Brandon W. Wheeler. *Functions Modeling Change: A Preparation for Calculus*. Beverley Hills, CA: Glencoe Press, 1976.

[41] diplomatic fish. *What's So Natural About e?* `https://www.youtube.com/watch?v=BfbZPEevM64`. Accessed: 2025-04-09. Views: 289K. Aug. 16, 2022.

[42] Domotro. *The number "e" is underrated...#shorts*. `https://www.youtube.com/shorts/L07BKc7Eej4`. Accessed: 2025-04-09. Views: 356K. Sept. 2, 2022.

[43] Dr Sean. *What exactly is e? Exploring e in 5 Levels of Complexity?* `https://www.youtube.com/watch?v=lXYxZBSkKLU`. Accessed: 2025-04-09. Views: 271K. June 24, 2024.

[44] C. H. Edwards, Jr. and David E. Penney. *Calculus and Analytic Geometry*. 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1986.

[45] John Ellis Evans. “Why Logarithms to the Base e Can Justly Be Called Natural Logarithms”. In: *National Mathematics Magazine* 14.2 (Nov. 1939), pp. 91–95.

[46] Ross L. Finney, Franklin D. Demana, Bert K. Waits, and Daniel Kennedy. *Calculus: Graphical, Numerical, Algebraic*. 4th ed. AP Edition. Boston, MA: Prentice Hall, 2012.

[47] Patrick Fitzpatrick. *Advanced Calculus*. Ed. by Paul J. Sally, Jr. 2nd ed. The Brooks/Cole Series in Advanced Mathematics. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole, 2006.

[48] Harley Flanders, Robert R. Korfhage, and Justin J. Price. *Calculus*. New York, NY: Academic Press, 1970.

[49] Harley Flanders and Justin J. Price. *Calculus with Analytic Geometry*. New York, NY: Academic Press, 1978.

[50] Foolish Chemist. *What REALLY is e? (Euler’s Number)*. `https://www.youtube.com/watch?v=rBhJhDOITuY`. Accessed: 2025-04-09. Views: 134K. Oct. 31, 2024.

[51] Hans Freudigmann, Dieter Greulich, Thomas Jörgens, Thorsten Jürgensen-Engl, Wolfgang Riemer, and Heike Spielmans. *Lambacher Schweizer Mathematik: Qualifikationsphase Leistungskurs/Grundkurs, Nordrhein–Westfalen*. German. Lambacher Schweizer Mathematics: Qualification Phase Advanced Course / Basic Course, North Rhine–Westphalia. Stuttgart: Ernst Klett, 2011. ISBN: 978-3-12-735401-0.

[52] Sophie Goldie, Val Hanrahan, Cath Moore, Jean-Paul Muscat, and Susan Whitehouse. *Mathematics: For A-level Year 1 and AS*. Ed. by Roger Porkess, Catherine Berry, and Heather Davis. AQA A-level. London: Hodder Education, 2017.

[53] Larry J. Goldstein, David C. Lay, David I. Schneider, and Nakhlé H. Asmar. *Calculus & Its Applications*. 14th ed. New York, NY: Pearson, 2017.

[54] Heinz Griesel and Helmut Postel, eds. *Elemente der Mathematik: Grundkurs 12/13 Nordrhein–Westfalen*. German. Elements of Mathematics: Basic Course 12/13 North Rhine–Westphalia. Hannover: Schroedel, 2000. ISBN: 3-507-83932-6.

[55] Stanley I. Grossman. *Calculus*. New York, NY: Academic Press, 1977.

[56] G. Hadley. *Elementary Calculus*. San Francisco, CA: Holden-Day, 1968.

[57] Godfrey Harold Hardy. *A Course of Pure Mathematics*. 5th ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1928.

[58] Edwin “Jed” Herman and Gilbert Strang. *Calculus*. Vol. 1. Houston, TX: OpenStax, Rice University, 2020. URL: `https://openstax.org/details/books/calculus-volume-1`.

[59] Soo Thong Ho and Nyak Hiong Khor. *New Additional Mathematics*. 3rd ed. Singapore: Marshall Cavendish Education, 2014.

[60] E. W. Hobson. *John Napier and the Invention of Logarithms, 1614: A Lecture*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1914.

[61] Deborah Hughes-Hallett, Patti Frazer Lock, Daniel E. Flath, and Andrew M. Gleason. *Applied Calculus*. 5th ed. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2014.

[62] Infinity Learn NEET. *Logarithms - What is e? | Euler's Number Explained | Infinity Learn NEET*. `https://www.youtube.com/watch?v=_-x90wGBD8U`. Accessed: 2025-04-09. Views: 3M. Dec. 8, 2016.

[63] Khan Academy. *Proof: The Derivative of __ is __ | Advanced derivatives | AP Calculus AB | Khan Academy*. `https://www.youtube.com/watch?v=SFWN-TkVFyI`. Accessed: 2025-04-09. Views: 78K. July 25, 2017.

[64] A. N. Kolmogorov, A. M. Abramov, Yu. P. Dudyitsyn, B. M. Ivlev, and S. I. Shvartsburd. *Алгебра и начала математического анализа: Учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений*. Russian. Ed. by A. N. Kolmogorov. 17th ed. Algebra and the Beginnings of Mathematical Analysis: Textbook for Grades 10–11 of General Education Institutions. Moscow: Просвещение (Prosveshchenie), 2008, p. 384.

[65] Rita Kós and Geza Kós. "What makes e natural?" In: *KöMaL Mathematical and Physical Journal for High Schools* 2.1 (2004).

[66] Edmund Landau. *Differential and Integral Calculus*. Trans. by Melvin Hausner and Martin Davis. Translated from the German. New York, NY: Chelsea Publishing Company, 1950.

[67] Serge Lang. *A First Course in Calculus*. New York, NY: Spring-Verlag, 1986.

[68] Ron Larson. *Precalculus*. 10th ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2018.

[69] Ron Larson and Bruce Edwards. *Calculus*. 12th ed. Boston, MA: Cengage, 2022.

[70] Ron Larson and Bruce Edwards. *Calculus: Early Transcendental Functions*. 7th ed. Boston, MA: Cengage, 2019.

[71] Ron Larson and Anne Hodgkins. *College Algebra and Calculus*. 2nd ed. Boston, MA: Brooks/Cole, 2013.

[72] C. G. Lewin. "The emergence of compound interest". In: *British Actuarial Journal* 24 (2019), pp. 1–27. DOI: `10.1017/S1357321719000254`.

[73] Daqian Li, Jianpan Wang, Jiangang Ying, Jiansheng Bao, Jing Cheng, Enli Xiao, Yijun Yao, Jiangang Ying, Wanguo Tian, Shenglu Ren, Yuelan Chen, and Jialu Wang, eds. *数学，选择性必修，第二册，普通高中教科书*. Chinese. Vol. 2. Math, Elective, Ordinary High School Textbooks. 上海教育出版社 (Shanghai Educational Publishing House), 2022.

[74] Daqian Li, Jianpan Wang, Jiangang Ying, Jiansheng Bao, Weiye Wang, Jixiang Fu, Chunming Wang, Zhiqiang Wang, Fen Pan, Quanshui Wu, Weiguo Gao, and Weiyuan Qiu, eds. *数学，第一册，普通高中教科书*. Chinese. Vol. 1. Math, Mandatory, Ordinary High School Textbooks. 上海教育出版社 (Shanghai Educational Publishing House), 2020.

[75] Margaret L. Lial, Raymond N. Greenwell, and Nathan P. Ritchey. *Calculus with Applications*. 11th ed. Boston, MA: Pearson, 2015.

[76] Margaret L. Lial, Raymond N. Greenwell, and Nathan P. Ritchey. *Finite Mathematics and Calculus with Applications*. 9th ed. Boston, MA: Pearson, 2011.

[77] Margaret L. Lial, John Hornsby, David I. Schneider, and Callie Daniels. *Precalculus*. 6th ed. Boston, MA: Pearson, 2017.

[78] Eli Maor. *e: The Story of a Number*. 1st ed. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1994.

[79] Math and Science. *14 - What is Euler's Number 'e', Ln(x) - Natural Log & e^x Functions?* `https://www.youtube.com/watch?v=6MQGrGvRDlE`. Accessed: 2025-04-09. Views: 243K. Mar. 24, 2020.

[80] Math Centre. *What is the Number e?* `https://www.youtube.com/watch?v=R0oUeLQIbIk`. Accessed: 2025-04-09. Views: 402K. July 29, 2016.

[81] Mathacy. *What is e and ln(x)? (Euler's Number and The Natural Logarithm)*. `https://www.youtube.com/watch?v=Q9puUgDc2BY`. Accessed: 2025-04-09. Views: 695K. Jan. 17, 2021.

[82] Mathologer. *The number e explained in depth for (smart) dummies*. `https://www.youtube.com/watch?v=DoAbA6rXrwA`. Accessed: 2025-04-09. Views: 394K. Mar. 30, 2017.

[83] MindSphereYT. *What is e?? Euler number 2.718 #maths #calculus*. `https://www.youtube.com/shorts/sPwDrtxRIzY`. Accessed: 2025-04-09. Views: 1.3M. Apr. 4, 2024.

[84] MIT OpenCourseWare. *Lec 6 | MIT 18.01 Single Variable Calculus, Fall 2007*. `https://www.youtube.com/watch?v=9v25gg2qJYE`. Accessed: 2025-04-17. Views: 360K. Jan. 16, 2009.

[85] MommyTalk (妈咪说). *常数 e 为什么代表了自然？一次看懂自然常数 e 的由来*. Chinese. https://www.youtube.com/watch?v=mZE0RmCbDe8. Accessed: 2025-04-09. Views: 605K. Jan. 7, 2019.

[86] A. G. Mordkovich and P. V. Semenov. *Алгебра и начала математического анализа: 11 класс, В двух частях, Часть 1, Учебник для учащихся общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни)*. Russian. 2nd ed. Algebra and the Beginnings of Mathematical Analysis: Grade 11, In Two Parts, Part 1, Textbook for Students of General Education Institutions (Basic and Advanced Levels). Moscow: Мнемозина (Mnemosina), 2014, p. 311.

[87] William K. Morrill. *Calculus*. Princeton, NJ: D. Van Nostrand, 1956.

[88] John Napier. *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio; Et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines; una cum Appendice, de alia eaque praestantiore Logarithmorum specie condenda. Quibus accessere Propositiones ad triangula sphaerica faciliore calculo resolvenda: Una cum Annotationibus aliquot doctissimi D. Henrici Briggii, in eas et memoratam appendicem*. Latin. The Construction of the Wonderful Canon of Logarithms, and Their Relations to Their Natural Numbers; Together with an Appendix on Another, and Indeed Superior, Kind of Logarithms to Be Constructed. To Which Are Added Propositions for Solving Spherical Triangles by Easier Calculation: Along with Several Notes by the Most Learned Mr. Henry Briggs on These and the Said Appendix. Edinburgh: Excudebat Andreas Hart, 1619.

[89] John Napier. *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio, Ejusque usus, in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logistica Mathematica, Amplissimi, Facillimi, et expeditissimi explicatio*. Latin. A Description of the Wonderful Canon of Logarithms, and Its Use in Both Kinds of Trigonometry; as well as a Clear Explanation of Its Use in All of Mathematical Computation, Most Ample, Easy, and Expedient. Edinburgh: Ex officina AndreæHart, 1614.

[90] Numberphile. *e (Euler's Number)*. https://www.youtube.com/watch?v=AuA2EAgAegE. Accessed: 2025-04-09. Views: 4.7M. Dec. 19, 2016.

[91] John M. H. Olmsted. *Calculus With Analytic Geometry*. Vol. 1. New York, NY: Appleton-Century-Crofts, 1966.

[92] George A. Osborne. *Differential and Integral Calculus*. Revised Edition. Boston, MA: D. C. Heath & Co., 1908.

[93] William F. Osgood. *Introduction to the Calculus*. New York, NY: Macmillan, 1922.

[94] Arnold Ostebee and Paul Zorn. “Telegraphic Reviews”. In: *The American Mathematical Monthly* 102.9 (1995), pp. 850–857. ISSN: 0002-9890. URL: `http://www.jstor.org/stable/2974522`.

[95] David Patrick. *Calculus*. San Diego, CA: AoPS Incorporated, 2010.

[96] Richard S. Paul and Ernest F. Haeussler. *Algebra and Trigonometry for College Students*. 2nd ed. Reston, VA: Reston Publishing Company, 1983.

[97] polymathematic. *Infinite money hack: Euler’s number and compound interest*. `https://www.youtube.com/shorts/hK0mSVce1Ng`. Accessed: 2025-04-09. Views: 894K. Sept. 13, 2022.

[98] Cris Prystay. “As Math Skills Slip, U.S. Schools Seek Answers From Asia”. In: *The Wall Street Journal* (Dec. 13, 2004). URL: `https://wsj.com/articles/SB110288916514797758`.

[99] Siobhan Roberts. *Finding Nirvana in Numbers*. Dec. 21, 2010. URL: `https://www.simonsfoundation.org/2010/12/21/finding-nirvana-in-numbers`.

[100] Jon Rogawski. *Calculus*. 2nd ed. New York, NY: W. H. Freeman and Company, 2012.

[101] Jon Rogawski. *Calculus: Early Transcendentals*. 1st ed. New York, NY: W. H. Freeman and Company, 2007.

[102] Jon Rogawski and Colin Adams. *Calculus: Early Transcendentals*. 3rd ed. New York, NY: W. H. Freeman and Company, 2015.

[103] Daniel Rubin. *How people came up with the natural logarithm and the exponential function #SoME1*. `https://www.youtube.com/watch?v=3B6FymMv8b4`. Accessed: 2025-04-09. Views: 419K. June 14, 2021.

[104] Richard Rusczyk. *Precalculus*. 1st ed. San Diego, CA: AoPS Incorporated, 2009.

[105] Richard Rusczyk and Matthew Crawford. *Intermediate Algebra*. San Diego, CA: AoPS Incorporated, 2008.

[106] Tarek Said. *The History of the Natural Logarithm - How was it discovered?* `https://www.youtube.com/watch?v=habHK6wLkic`. Accessed: 2025-04-09. Views: 656K. Mar. 4, 2022.

[107] Gregory Saint-Vincent. *Opus geometricum quadraturæcirculi et sectionum coni, decm libris comprehensum*. A Geometrical Work on the Quadrature of the Circle and the Conic Sections, Comprised in Ten Books. Antwerp: Apud Ioannem et Iacobum Meursios, 1647.

[108] Alfonso Antonio de Sarasa. *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi: Datis tribus quibuscumque magnitudinibus, rationalibus vel irrationalibus, datasque duarum ex illis logarithmis, tertiae logarithmum geometrice invenire.* Latin. Solution to a problem proposed by Marin Mersenne, involving the geometric determination of logarithms. Antwerpiae: Apud Ioannem & Iacobum Meursios, 1649.

[109] Zun Shan, Shanliang Li, Jun Ge, Jiahong Xu, and Zhiqun Shi, eds. *数学, 必修, 第一册, 普通高中教科书*. Chinese. Vol. 1. Math, Mandatory, Ordinary High School Textbooks. 江苏凤凰教育出版社 (Phoenix Education Publishing), 2019.

[110] Zun Shan, Shanliang Li, Jun Ge, Jiahong Xu, Zhiqun Shi, and Yadong Fan, eds. *数学, 选择性必修, 第二册, 普通高中教科书*. Chinese. Vol. 2. Math, Elective, Ordinary High School Textbooks. 江苏凤凰教育出版社 (Phoenix Education Publishing), 2019.

[111] Smithsonian Institution. *Electronic Calculators—Handheld.* `https://www.si.edu/spotlight/handheld-electronic-calculators`. Accessed: 2025-04-08. Archived at `https://web.archive.org/web/20250331205959/https://www.si.edu/spotlight/handheld-electronic-calculators/`.

[112] Michael Spivak. *Calculus.* 3rd ed. Houston, TX: Publish or Perish, Inc., 1994.

[113] James Stewart. *Calculus.* 8th ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2016.

[114] James Stewart. *Calculus: Early Transcendentals.* 3rd ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1995.

[115] James Stewart. *Calculus: Early Transcendentals.* 8th ed. Boston, MA: Cengage Learning, 2015.

[116] James Stewart. *Essential Calculus: Early Transcendentals.* 2nd ed. Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning, 2013. ISBN: 978-1-133-11228-0.

[117] James Stewart, Lothar Redlin, and Saleem Watson. *Precalculus: Mathematics for Calculus.* 5th ed. Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole, 2006.

[118] Doris S. Stockton. *Essential Precalculus.* Boston, MA: Houghton Mifflin, 1978.

[119] Michael Sullivan. *Algebra and Trigonometry.* 6th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002. ISBN: 0-13-091465-7.

[120] Michael Sullivan. *Precalculus.* 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1999. ISBN: 0-13-095402-0.

[121] Michael Sullivan and Kathleen Miranda. *Calculus: Early Transcendentals.* 1st ed. New York, NJ: W. H. Freeman and Company, 2014.

[122] Brook Taylor. *Methodus Incrementorum Directa & Inversa*. Latin. London: Typis Pearsonianis: Prostant apud Gul. Innys ad Insignia Principis in Caemeterio Paulino, 1715, pp. 21–23.

[123] Keng Seng Teh, Cheng Yee Loh, and Ban Har Yeap. *New Syllabus Additional Mathematics*. 8th ed. Singapore: Shing Lee, 2007.

[124] The Organic Chemistry Tutor. *Logarithms - e - Euler's Number*. `https://www.youtube.com/watch?v=pDFcu_wLOzo`. Accessed: 2025-04-09. Views: 132K. Jan. 21, 2020.

[125] François Thirioux. *Mathématiques Terminale S (Enseignements spécifique et de spécialité): Cours complet, exercices et problèmes corrigés pour réussir en prépa*. French. Références Sciences. Paris: Éditions Ellipses, 2015. ISBN: 978-2-340-00377-4.

[126] George B. Thomas, Jr. *Calculus and Analytic Geometry*. 4th ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1968.

[127] George B. Thomas, Jr. and Ross L. Finney. *Calculus and Analytic Geometry*. 6th ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1968.

[128] George B. Thomas, Jr., Ross L. Finney, and Maurice D. Weir. *Calculus and Analytic Geometry*. 9th ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1996.

[129] UNESCO. *Records of the General Conference, 40th session, Paris, 12 November – 27 November 2019, Volume 1: Resolutions*. Resolution 30, p. 37. Accessed on March 22, 2025. 2019. URL: `https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000372579.page=37`.

[130] Dale Varberg and Edwin Purcell. *Calculus*. 7th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1997.

[131] Stefan Waner and Steven R. Costenoble. *Finite Mathematics and Applied Calculus*. 8th ed. Boston, MA: Cengage, 2023.

[132] Shangzhi Wang and Jiguang Bao, eds. *数学, 必修, 第一册, 普通高中教科书*. Chinese. Vol. 1. Math, Mandatory, Ordinary High School Textbooks. 北京师范大学出版社 (Beijing Normal University Press), 2019.

[133] Shangzhi Wang and Jiguang Bao, eds. *数学, 选择性必修, 第二册, 普通高中教科书*. Chinese. Vol. 2. Math, Elective, Ordinary High School Textbooks. 北京师范大学出版社 (Beijing Normal University Press), 2019.

[134] Allyn J. Washington and Richard S. Evans. *Basic Technical Mathematics with Calculus*. 12th ed. Hoboken, NJ: Pearson, 2023.

[135] Maurice D. Weir, Joel Hass, and George B. Thomas. *Thomas' Calculus: Early Transcendentals*. 12th ed. Boston, MA: Addison-Wesley, 2010.

[136] Maurice D. Weir, Joel Hass, and George B. Thomas. *Thomas' Calculus: Early Transcendentals*. 13th ed. Boston, MA: Pearson, 2014. ISBN: 978-0-321-88407-7.

[137] Eddie Woo. *What is the number "e" and where does it come from?* `https://www.youtube.com/watch?v=pg827uDPFqA`. Accessed: 2025-04-09. Views: 3.5M. Feb. 23, 2015.

[138] Yongle Li (李永乐老师). *人生中最重要的概念：复利，是什么？想贷款和分期就必须要了解它；李永乐老师讲自然对数的底 e*. Chinese. `https://www.youtube.com/watch?v=2a6gDHfWQGA`. Accessed: 2025-04-09. Views: 687K. June 13, 2018.

[139] Zach Star. *e (Euler's Number) is seriously everywhere | The strange times it shows up and why it's so important*. `https://www.youtube.com/watch?v=AAir4vcxRPU`. Accessed: 2025-04-09. Views: 1.2M. May 15, 2019.

[140] Jianyue Zhang, Zenghu Li, Yong Li, Haidong Li, Hongcai Li, and Yufeng Guo, eds. *数学，必修，第一册，普通高中教科书*. Chinese. Vol. 1. Math, Mandatory, Ordinary High School Textbooks. 人民教育出版社 (People's Education Press), 2019.

[141] Jianyue Zhang, Zenghu Li, Yong Li, Haidong Li, Hongcai Li, and Yufeng Guo, eds. *数学，选择性必修，第二册，普通高中教科书*. Chinese. Vol. 2. Math, Elective, Ordinary High School Textbooks. 人民教育出版社 (People's Education Press), 2019.

A 为什么指数函数可导?

大多中学教材列举了如下一条或多条事实，却没有给出证明：

- $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在
- 所有指数函数都是连续的
- 所有指数函数都是可导的
- 对于任意一个连续函数 $f(x)$, $\int_a^b f(x)\,dx$ 存在
- 微分方程 $y'=y$，初始条件 $y(0)=1$ 的解存在且唯一

如果读者满意于这些假设，就不必阅读本附录。然而，如果好奇的读者可能渴望为 e 的定义找到一个更为稳固的基石，那就必须证明一切指数函数都是可导的。

我们之所以加入这个附录，是因为美国多本 Early Transcendentals 版主流微积分教材（见第3.1.2节）用"切线斜率为 1"的定义引入 e，但在后续章节中采用 $\frac{1}{x}$ 的积分形式将其重新定义。这些教材会说明，前者虽直观，但仅依赖于数值与图像，而后者的积分形式则能为指数、对数以及 e 的定义提供更踏实的理论基础。

本附录指出，在不引入积分的情况下，也能建立完整的指数函数理论。因为 $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ 这一定义依赖于一个深刻的定理：我们调查的所有初等微积分教材都没有证明连续函数的可积性，却以它作为前提。这种假设是合理的，因为微积分教材需要依赖定积分的存在来介绍后续内容。而本附录将展示，用于建立 e 的直观图像定义所需的数学基础其实较为初等，因此读者完全可以安心地使用该直观定义。

我们将从一个通常被视作理所当然的命题出发：正整数次幂函数的存在性。我们只讨论其在正实数范围内的定义。

命题 A.1. *对于任意正整数 n，函数 $f(x) = x^n$ 在所有正实数 x 上都有定义，且是单调递增的、连续的、可逆的，其值域是所有正实数的集合。*

证明. 首先考虑 $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$，即从正有理数到正实数的函数。当 $x = \frac{m}{n}$ 是有理数时，$f(x)$ 有定义，因为它只是将一个有理数自身重复相乘。该函数在正有理数上是递增的，因为对于任意正数 x 与 y，$(x+y)^n$ 的二项式展开以 x^n 开头，其余各项均为正，因此 $(x+y)^n > x^n$。

接下来我们将证明不存在一个区间 $[b, c]$ 满足 $0 < b < c$ 且 $f(\mathbb{Q}^+)$ 的值域完全不包含该区间。若能证明这点，再结合 f 在有理定义域下的单调性，即可根据实数的基本性质推出 f 在 $\mathbb{R}^+$ 上可以唯一地扩展为一个连续且可逆的函数，其值域为所有正实数。

我们将用反证法证明上述命题。假设存在这样的区间。我们断言存在一个正实数 M，使得对于任意 $x \le c$ 和 $0 < h < 1$，都有 $(x+h)^n - x^n < Mh$。这是因为 $(x+h)^n$ 的二项式展开中，首项 x^n 会与 x^n 抵消，剩下的部分为 $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^k x^{n-k}$。在 $0 < h < 1$ 的范围内，有 $h^n < h^{n-1} < \cdots < h^2 < h$，因此该和为正，且满足

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} h^1 x^{n-k} < h \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} = h(x+1)^n \le h(c+1)^n,$$

这里的等号再次利用了二项式定理将和式化为 $(x+1)^n$。取 $M = (c+1)^n$ 即可。

因此，只需选取某个小于 $\frac{c-b}{M}$ 的有理数 h，并考虑一系列 n 次幂 h^n，$(2h)^n$，$(3h)^n$，$\cdots$，它们的相邻差值始终小于 $c - b$，所以其中必有一项落入区间 $[b, c]$ 中，从而导致矛盾。 □

既然我们已经知道，所有正实数都可以取正整数次幂（也可以取正整数次根，因为上述命题证明了该函数是可逆的），我们便可以构造指数函数了。

命题 A.2. *对于任意实数 $a > 1$，函数 $f(x) = a^x$ 在所有实数 x 上都有定义，且是递增、连续、可逆的，其值域是所有正实数。*

证明. 首先考虑 $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$，即从有理数到正实数的函数。当 $x = \frac{m}{n}$ 是有理数时，$f(x)$ 是有定义的，因为它可以表示为正整数次幂与正整数次根的复合函数 $(a^m)^{1/n}$。在有理数上，f 是递增的，因为对于任意有理数 $x < y$，有 $a^y = a^x a^{y-x}$，而任意正有理数次幂 a^{y-x} 都大于 1，因为 $a > 1$ 的正整数次幂和正整数次根都大于 1。

类似于命题A.1的证明，我们只需证明不存在区间 $[b, c]$ 满足 $0 < b < c$，且整个区间都不在 $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}^+$ 的值域中。假设存在这样的区间。我们可以证明存在某个正整数 n 使得 $a^{1/2^n} < \frac{c}{b}$，方法是不断对 a 取平方根（该过程收敛于 1，因为当 x 足够接近 0 时，有 $\sqrt{1+x} < 1 + 0.6x$；该不等式可以通过两边平方并代数运算来验证）。由此可得，存在正整数 k，使得等比数列 $a^{k/2^n}$ 落在区间 $[b, c]$ 内，因为这个等比数列不可能完全跳过整个区间。 □

本附录的其余部分将证明指数函数可导。像很多其他情况一样，凸性将是我们的一个重要工具。以下命题说明：函数图像 $y = f(x)$ 上方（含图像本身）的所有点所构成的集合在几何上是凸的，也就是说，以集合中任意两点为端点作线段，这条线段被完全包含在该集合中。

命题 A.3. 对于任意实数 $a > 1$，以及任意实数 $b < c$，在开区间 (b, c) 内，函数 $f(x) = a^x$ 的图像严格位于连接点 (b, a^b) 与 (c, a^c) 的线段的下方。

证明. 由连续性可知，我们只需证明：对任意有理数 $0 < \frac{m}{n} < 1$，位于 b 与 c 之间、横坐标为 b 到 c 的 $\frac{m}{n}$ 比例处的曲线上的点，严格在弦的下方。该点在弦上的坐标为

$$\left(\left(\frac{n-m}{n}\right) b + \left(\frac{m}{n}\right) c, \quad \left(\frac{n-m}{n}\right) a^b + \left(\frac{m}{n}\right) a^c\right)$$

对 $n - m$ 个 a^b 和 m 个 a^c 应用 n 元算术平均–几何平均不等式[8]：

$$\begin{aligned} \left((a^b)^{n-m}(a^c)^m\right)^{\frac{1}{n}} &< \frac{(n-m)a^b + ma^c}{n} \\ a^{\frac{1}{n}((n-m)b+mc)} &< \frac{(n-m)a^b + ma^c}{n}, \end{aligned}$$

这正好表示该函数在该横坐标处位于弦的下方，从而完成证明。 □

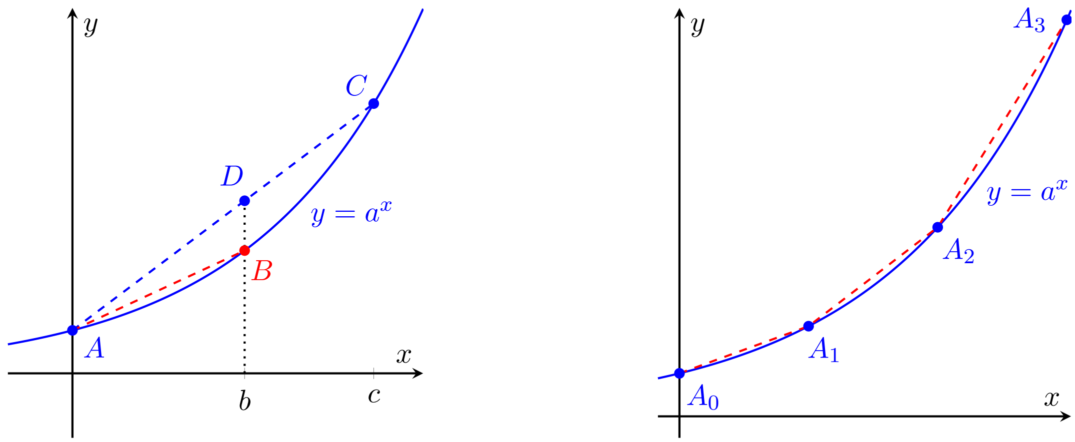
通过上述命题，我们可以证明：在 $x = 0$ 处，差商的左右极限都存在。事实上，我们还能证明更强的结论。

命题 A.4. 对于任意实数 $a > 1$，关于 h 的函数 $\frac{a^h-1}{h}$ 在 $\mathbb{R}^-$ 上是递增函数，在 $\mathbb{R}^+$ 上也是递增函数，并且

$$\sup_{h<0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{a^h - 1}{h} \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{a^h - 1}{h} = \inf_{h>0} \frac{a^h - 1}{h}$$

[8]我们实际上只需对分母是 2 的幂的有理数使用 AM-GM 不等式，因为连续性仍能完成整个证明。对 n 是 2 的幂的情形，该不等式可用归纳法轻松证明：基本情形 $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$ 可通过两边平方后代数验证。归纳步骤如：$(x_1 x_2 \cdots x_{2n})^{1/(2n)} = \sqrt{(x_1 \cdots x_n)^{1/n}(x_{n+1} \cdots x_{2n})^{1/n}} < \frac{1}{2}\left((x_1 \cdots x_n)^{1/n} + (x_{n+1} \cdots x_{2n})^{1/n}\right) < \frac{1}{2n}(x_1 + \cdots + x_{2n})$。

证明. 由于命题A.3已经证明了函数 $f(x)=a^x$ 是凸函数，图6中的几何论证可以表明差商 $\frac{a^h-1}{h}$ 在 $\mathbb{R}^+$ 上是递增的。类似的论证也适用于 $\mathbb{R}^-$。再用类似方法可得，对于任意 $h_1<0<h_2$，总有 $\frac{a^{h_1}-1}{h_1}<\frac{a^{h_2}-1}{h_2}$。这些结论足以推出命题中的不等式。



(a) (b)

图 6:（a）取任意实数 $0<b<c$，设点 $A(0,1)$、$B(b,a^b)$、$C(c,a^c)$。由于函数是下凸的，因此在弦 AC 上的点 D（其横坐标与点 B 相同）必然在 B 的上方。于是，直线 AB 的斜率小于 ADC 的斜率，这正是我们想要的不等式 $\frac{a^b-1}{b}<\frac{a^c-1}{c}$。（b）直线段 A_0A_1、A_1A_2、A_2A_3 的斜率依次递增，而且每一对相邻斜率的差值至少为式(5)中定义的 Δ。

$\square$

我们现在可以证明可导性了。

命题 A.5. *对于任意实数 $a>1$，函数 $f(x)=a^x$ 在函数上任意一点可导。*

证明. 正如第2.4节中的计算所示，在任意 x 处，$f(x)$ 的差商为

$$\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\cdot\frac{a^h-1}{h}.$$

对于每个 x，定义 $f'_+(x)=\lim_{h\to0^+}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$，$f'_-(x)=\lim_{h\to0^-}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$。令

$$\Delta=\lim_{h\to0^+}\frac{a^h-1}{h}-\lim_{h\to0^-}\frac{a^h-1}{h},\tag{5}$$

根据命题A.4，该极限存在且非负。我们只需证明 $\Delta=0$。

假设 $\Delta>0$。令 $M=f'_+(1)-f'_+(0)$。取一个正整数 n 使得 $n\Delta>M$。定义点 $A_0,A_1,\ldots,A_n$，其中 A_k 的坐标为 $\left(\frac{k}{n},a^{k/n}\right)$，如图6所示。记 $s(A_kA_{k+1})$ 为线段 A_kA_{k+1} 的斜率。由命题A.4可知：

$$f'_+\left(\frac{0}{n}\right)<s(A_0A_1)<f'_-\left(\frac{1}{n}\right)\overset{*}{<}f'_+\left(\frac{1}{n}\right)<s(A_1A_2)<f'_-\left(\frac{2}{n}\right)\overset{*}{<}f'_+\left(\frac{2}{n}\right),$$

其中带星号的不等式两边的间隔大小为 $a^{k/n}\Delta$，k 从 0 到 n 不等。由于所有 $a^{k/n}\geq1$，这些间隔至少为 Δ。将这个不等式链一直延申到 $f'_+(1)$，我们就得到 $f'_+(0)<f'_+(1)$ 且差距至少为 $n\Delta>M$，这与差距为 M 相矛盾，从而证毕。 $\square$

因此，我们之前所做的一切既直观又具坚实的数学基础。